Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"
Sapienza Università di Roma

Seminari di Geometria Superiore
A.A. 2013-2014 - Prof. P. Piccinni

Teoria di Hodge e di Dolbeault

a.c.d. Lorenzo Dello Schiavo, Matilde Manzaroli, Leonardo Bagaglini

Teoremi di Hodge su varietà riemanniane

a.c.d. Lorenzo Dello Schiavo

Nota preliminare. Al fine di rendere la trattazione di alcuni argomenti tecnici più leggera e discorsiva, le dimostrazioni di alcuni passaggi sono presentate in modo solo parzialmente esaustivo. Tali passaggi sono marcati, *à la Bourbaki*, dal simbolo ⍐ ("*tournant dangereux*"), con riferimento all'intero capoverso che il simbolo precede.

Questione di punti di vista...

Scopo del presente seminario sarà quello di presentare alcuni importanti risultati relativi alla geometria delle varietà riemanniane, indagandoli dal punto di vista, forse meno consueto, dell'analisi, in generale, e dell'analisi funzionale, in particolare. L'obbiettivo di questa scelta è quello di completare il panorama dei risultati di seguito illustrati riguardandoli in una prospettiva più ampia e capace di coglierne alcuni aspetti essenziali altrimenti trascurati.

Allo scopo di evitare complicazioni che non forniscano contributi rilevanti alla teoria, l'ambito considerato nel presente capitolo sarà quello *reale*, in contrapposizione a quello *complesso*, più naturale nel contesto dei capitoli successivi. Si tenga presente tuttavia che tutti i risultati enunciati sono validi anche in ambito complesso, a meno di "complessificare" operatori e strutture in modo opportuno.

Nella trattazione a seguire si indicherà con (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione reale n, dotata di una metrica g e del differenziale di volume da essa indotto dvol_g.

Saranno oggetto della trattazione successiva

- $\Lambda^k M \doteq \bigsqcup_{x\in M} \Lambda^k (T^*_x M)$ il *k-esimo fibrato esterno reale* su M;
- $\Omega^k M \doteq \Omega^k_{C^\infty} M \doteq \Gamma(\Lambda^k M)$ lo *spazio delle k-forme lisce su M a valori reali.*

Si considerino gli spazi $\Omega^\bullet M$ come dotati del prodotto scalare

$$\langle \omega \,|\, \eta \rangle \doteq \int_M \omega \wedge *\eta \, \mathrm{dvol}_g,$$

dove con $*\colon \Lambda^k M \to \Lambda^{n-k} M$ si è indicato l'*operatore di Hodge reale*. Per una dimostrazione del fatto che tale forma, evidentemente biliare, sia in effetti un prodotto scalare, nonché per una spiegazione esaustiva del perché sia naturale considerarla, si rimanda ai precedenti seminari.

Denotando con $\|\cdot\|$ la norma indotta da tale prodotto è naturale − da un punto di vista analitico − chiedersi se gli spazi $(\Omega^\bullet M, \|\cdot\|)$ siano o meno *completi* come spazi metrici, ovvero se siano o meno *spazi di Hilbert*. Semplici considerazioni sullo spazio $\Omega^0(S^1, g^{\mathrm{can}})$ delle funzioni a valori reali sul cerchio unitario dotato della metrica standard suggeriscono che tale spazio *non* è completo e la norma su di esso è in effetti la norma usuale dello spazio di Lebesgue $L^2([0, 2\pi])$, inteso come spazio delle funzioni a valori reali misurabili rispetto alla σ-algebra di Borel indotta dalla topologia di S^1 e a quadrato sommabile rispetto all'integrazione in dvol_{S^1}.

La presente analogia si può estendere allo spazio $\Omega^k M$ di una generica varietà M, tuttavia, un argomento rigoroso atto a tale scopo richiede importanti strumenti di analisi funzionale. Allo scopo di aggirare tale ostacolo, almeno ad una prima lettura, ci si limita qui a definire

- $\Omega^k_{L^2} M \doteq \mathrm{cl}_{\|\cdot\|}\, \Omega^k M$ lo *spazio delle k-forme a quadrato sommabile su M a valori reali*, dove $\mathrm{cl}_{\|\cdot\|}\, \Omega^k M$ denota il *completamento di Hausdorff* dello spazio $\big(\Omega^k M, \|\cdot\|\big)$, nella norma indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

  Il simbolo L^2 in pedice sta ad indicare come si possa intendere tale spazio come uno spazio di k-forme differenziali a coefficienti L^2 (piuttosto che C^∞) rispetto ad un'opportuna misura, come si prova in appendice.

In virtù del teorema del completamento per spazi metrici, tale spazio è ben definito come spazio di Hilbert.

Stante la maggiore ricchezza di risultati fornita dalla teoria degli spazi di Hilbert, lo scopo della sezione successiva sarà quello di estendere agli spazi $\Omega^\bullet_{L^2} M$ alcuni operatori naturali definiti sugli spazi $\Omega^\bullet M$. Si richiamano a tal fine alcune nozioni, definizioni e risultati necessari alla trattazione a seguire, forniti senza dimostrazione (per la quale si rimanda eventualmente ai precedenti seminari).

Definizione (*Codifferenziale di de Rham*)**.** Indicato con $\mathrm{d}^k \colon \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ il differenziale di de Rham reale su M, si denoti con

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}^*)^{k+1} : \Omega^{k+1} M &\longrightarrow \Omega^k M \\ \omega &\longmapsto -(-1)^{nk} * \mathrm{d} * \omega \end{aligned}$$

l'aggiunto formale di d^{k-1} rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Definizione (*Operatore di Laplace-de Rham*)**.** Sia

$$\Delta^k \doteq \mathrm{d}^{k-1} (\mathrm{d}^*)^k + (\mathrm{d}^*)^{k+1} \mathrm{d}^k$$

l'*operatore di Laplace−de Rham* (anche: *di Hodge−Laplace*) *reale* (di seguito: *laplaciano*); per brevità, stante la dissimmetria dei simboli, si indicherà anche $\Delta = \mathrm{d}\,\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\,\mathrm{d}$.

Lemma 1. Si ha $[\Delta, *] = 0$. Inoltre Δ è autoaggiunto rispetto al prodotto $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda ai precedenti seminari. ■

Definizione (Forme *chiuse*, *cochiuse*, *armoniche*)**.** Si dicano *chiuse* (rispettivamente *cochiuse*, *armoniche*) le forme ω tali che $\mathrm{d}\omega = 0$ (rispettivamente $\mathrm{d}^*\omega = 0$, $\Delta\omega = 0$). Si indichi con $\mathcal{H}^k M \doteq \ker \Delta^k$ lo spazio delle k-forme armoniche su M a coefficienti reali.

Teoremi di decomposizione spettrale

La norma indotta dal prodotto scalare presentato poc'anzi suggerisce che il contesto liscio non sia l'unico nel quale considerare l'operatore di Laplace. In particolare, tale operatore si estende in modo naturale a spazi $\Omega^\bullet_{L^2} M$ grazie alla seguente definizione.

Definizione (Operatore debole di Laplace−de Rham)**.** Data una forma $\omega \in \Omega^k_{L^2} M$ si definisca $\Delta^{\mathrm{deb}}\omega$ l'unica forma in $\Omega^k_{L^2} M$ tale che

$$\forall \eta \in \Omega^k M \qquad \big\langle \Delta^{\mathrm{deb}}\omega \,\big|\, \eta \big\rangle = \langle \omega \,|\, \Delta\eta \rangle \,.$$

Sia quindi $\Delta^{\mathrm{deb}} \colon \Omega^k_{L^2} M \to \Omega^k_{L^2} M$ l'operatore definito da $\Delta^{\mathrm{deb}} \colon \omega \mapsto \Delta^{\mathrm{deb}}\omega$. Per brevità, tale operatore si denoterà nel seguito ancora con il simbolo Δ.

La presente definizione di operatore di Laplace−de Rham risulta ben posta per il lemma 1, secondo il quale essa coincide con la definizione usuale sulle forme lisce, ed estende la precedente grazie al lemma medesimo e alla densità degli spazi $(\Omega^\bullet M, \|\cdot\|)$ nei relativi completamenti $\left(\Omega^\bullet_{L^2} M, \|\cdot\|\right)$. Si noti tuttavia che la definizione non è ben posta se M è una varietà *non* compatta; in particolare, un tale operatore debole potrebbe non esistere.

Stante tale definizione, si è ricondotto l'operatore di Laplace−de Rham ad un operatore Δ definito sugli spazi di Hilbert $\left(\Omega^\bullet_{L^2} M, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\right)$, contesto nel quale si può applicare l'opportuna teoria spettrale relativa, grazie alla quale è possibile dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2 (Teorema di Hodge per funzioni)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g.

Allora esiste una $\Omega^0_{L^2} M$*-base g-ortonormale* di *autofunzioni lisce* per il laplaciano Δ^0. Inoltre, 0 è un autovalore di molteplicità 1 per Δ^0, la successione degli autovalori è divergente e ogni autovalore è *reale*, *non negativo* e di *molteplicità finita*.

Sketch. Si omette una dimostrazione completa di questo teorema, per la quale si rimanda a [8, teor. 1.29, p. 32]. Si provano qui i soliti enunciati relativi alla positività (nullità) degli autovalori.

Sia f una λ-autofunzione per Δ^0 di norma unitaria. Essendo $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ non degenere e definito positivo si ha

$$\lambda = \langle \lambda f \mid f\rangle = \left\langle \Delta^0 f \,\middle|\, f\right\rangle = \langle (\mathrm{d}\,\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\,\mathrm{d}) f \mid f\rangle = \langle \mathrm{d}^*\,\mathrm{d} f \mid f\rangle = \langle \mathrm{d} f \mid \mathrm{d} f\rangle \geq 0,$$

dunque ogni autovalore λ è reale e non negativo. Ragionando analogamente su un eventuale autovalore nullo si ha

$$0 = \left\langle \Delta^0 f \,\middle|\, f\right\rangle = \langle \mathrm{d} f \mid \mathrm{d} f\rangle\,,$$

da cui, essendo $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ non degenere, segue $\mathrm{d} f = 0$. Poiché M è connessa, f non può che essere costante, dunque $\ker \Delta^0 \cong \mathbb{R}$.

Osservazione. Osservando che M, dunque ogni sua immagine mediante applicazioni continue, è compatta, si noti *en passant* la correlazione di questo risultato con il teorema di Liouville per funzioni armoniche.

Il risultato presentato nel teorema 2 si può generalizzare, con dimostrazione pressoché invariata, al seguente teorema di decomposizione spettrale per k-forme differenziali. Si osservi tuttavia che, al contrario di quanto affermato per le funzioni, lo spazio $\mathcal{H}^k M$ delle k-forme armoniche ($k > 0$) ha generalmente dimensione superiore a 1, come sarà chiaro dall'enunciato del teorema 6.

Teorema 3 (Teorema di decomposizione spettrale di Hodge per forme differenziali)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g.

Allora esiste una $\Omega^k_{L^2} M$*-base g-ortonormale* di *auto-k-forme lisce* per il laplaciano Δ^k. Inoltre, 0 è un autovalore per Δ^k, la successione degli autovalori è divergente e ogni autovalore è *positivo* e di *molteplicità finita*. In particolare si ha

$$\Omega^\bullet_{L^2} M \underset{\mathsf{Hilb}_\mathbb{R}}{\cong} \widehat{\bigoplus_\lambda} \left(\Omega^\bullet_{L^2} M\right)_\lambda$$

dove si denota con $\left(\Omega^\bullet_{L^2} M\right)_\lambda$ il λ-autospazio di Δ.

Osservazione. Nella precedente scrittura si è indicata con il simbolo $\widehat{\oplus}$ la somma diretta nella categoria $\mathsf{Hilb}_\mathbb{R}$ degli spazi di Hilbert reali. Si noti che, nel caso di spazi infinito-dimensionali, quale ad esempio lo spazio somma in esame, tale struttura di somma diretta consiste (rispetto alla somma diretta algebrica di spazi vettoriali, usualmente denotata con il simbolo $\oplus$) dell'ulteriore specificazione del prodotto scalare.

La buona definizione di tale prodotto (la cui scrittura è da ritenersi implicita nel simbolo $\widehat{\oplus}$) è conseguenza della completezza; è pertanto necessario ridursi, nel considerare forme differenziali lisce, alla sola struttura di somma diretta algebrica.

Dimostrazione. Per una dimostrazione, analoga a quella del teorema 2, si rimanda a [8, teor. 1.30, p. 34]. ■

Il teorema 3 qui presentato costituisce il fondamento di alcuni profondi risultati presentati nella prossima sezione, dei quali rappresenta la principale interpretazione nell'ambito dell'analisi su varietà differenziali.

Teoremi di decomposizione di Hodge

Una riflessione ulteriore sui teoremi di decomposizione spettrale per l'operatore di Laplace−de Rham suggerisce che tale decomposizione, il cui contesto naturale è lo spazio di Hilbert infinito-dimensionale $\Omega^\bullet_{L^2} M$, può essere reinterpretata in modo algebrico in un ambito finito-dimensionale, strettamente correlato alla geometria differenziale e alla topologia algebrica.

Segue infatti dalle definizioni degli operatori che $[\mathrm{d}, \Delta] = [\mathrm{d}^*, \Delta] = 0$. Dunque, se f è un'autofunzione (un'autoforma) liscia per Δ di autovalore λ, allora o f è *chiusa* oppure $\mathrm{d}f$ è anch'essa un'autoforma liscia di autovalore λ; si ha infatti $\Delta(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(\Delta f) = \mathrm{d}\lambda f = \lambda\,\mathrm{d}f$. Ragionando analogamente per d^* si conclude che, per ogni autofunzione (o autoforma) di autovalore λ, l'autofunzione è *chiusa* (rispettivamente *cochiusa*) *oppure* $\mathrm{d}f$ (rispettivamente $\mathrm{d}^* f$) è ancora un'autoforma (o un'autofunzione) per Δ di stesso autovalore λ.

Il presente ragionamento fornisce un'indicazione euristica del fatto che lo spazio generato dalle Δ-autoforme di autovalore non nullo sia costituito da forme esatte e/o coesatte. Al contrario, dalla decomposizione spettrale non si ricava alcuna informazione riguardo le 0-autoforme, ovvero le forme *armoniche*, le quali saranno infatti forme solamente chiuse (e cochiuse).

Il seguente teorema di decomposizione formalizza l'argomento euristico esposto poc'anzi, evidenziando da un lato il ruolo privilegiato delle forme armoniche, dall'altro la stretta correlazione fra la decomposizione spettrale del laplaciano e la struttura indotta dagli operatori naturali d e d^*.

Teorema 4 (Teorema di decomposizione di Hodge)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g.

Allora lo spazio $\mathcal{H}^k M$ è finito-dimensionale e lo spazio $\Omega^k M$ si decompone come

$$\Omega^k M = \mathcal{H}^k M \oplus^\perp \mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \oplus^\perp (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M,$$

equivalentemente,

$$\Omega^k M = \ker \Delta^k \oplus^\perp \operatorname{im} \mathrm{d}^{k-1} \oplus^\perp \operatorname{im} (\mathrm{d}^*)^{k+1}.$$

Dimostrazione. La finito-dimensionalità dello spazio $\mathcal{H}^k M \doteq \ker \Delta^k$ segue immediatamente dal teorema 3.

Si omette qui una dimostrazione formale dell'inclusione

$$\Omega^k M \subset \mathcal{H}^k M \oplus^\perp \mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \oplus^\perp (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M,$$

la quale costituisce parte essenziale della dimostrazione e tuttavia richiede strumenti di analisi reale e funzionale che esulano dal presente seminario; un'idea del perché tale inclusione sia effettivamente vera si può ricavare dall'argomento euristico esposto poc'anzi. Per i riferimenti bibliografici per questa parte della dimostrazione si rimanda al successivo teorema 5. Si osservi che l'inclusione opposta è, al contrario, banale.

Stante l'identità insiemistica degli spazi considerati, poiché essi sono spazi vettoriali segue che

$$\mathcal{H}^k M \cup \mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \cup (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M = \mathcal{H}^k M + \mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M + (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M$$

dunque, allo scopo di provare che tale somma è diretta, è sufficiente provare che le intersezioni a coppie degli spazi considerati sono banali.

Ancora dal teorema 3 segue che $\mathcal{H}^k M \cap \left(\mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \cup (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M\right) = \{0\}$, essendo autospazi relativi ad autovalori distinti a intersezione banale. Per provare che $\mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \cap (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M = \{0\}$ si considerino α una $(k-1)$-forma, β una k-forma e γ una $(k+1)$-forma e si supponga $\mathrm{d}\alpha = \beta = \mathrm{d}^*\gamma$. Segue $\|\beta\| \doteq \langle \beta \,|\, \beta \rangle = \langle \mathrm{d}\alpha \,|\, \mathrm{d}^*\gamma \rangle = \left\langle \mathrm{d}^2\alpha \,\middle|\, \gamma \right\rangle = 0$, dunque $\beta = 0$.

Per quanto riguarda l'ortogonalità della decomposizione si ha

$$\langle \mathrm{d}\alpha \,|\, \mathrm{d}^*\gamma \rangle = \left\langle \mathrm{d}^2\alpha \,\middle|\, \gamma \right\rangle = \langle 0 \,|\, \gamma \rangle = 0,$$

ovvero $\mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \perp (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M$. Inoltre, $\ker \Delta^k$ è ortogonale a $\operatorname{im} \mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \cup (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M$ essendo gli autospazi relativi ad autovalori distinti mutuamente ortogonali e contenendo $\operatorname{im} \mathrm{d}^{k-1}\Omega^{k-1} M \cup (\mathrm{d}^*)^{k+1}\,\Omega^{k+1} M$ ogni altro autospazio di Δ^k una volta assunta la decomposizione. ■

La decomposizione dello spazio $\Omega^\bullet M$ delle forme differenziali presentata nel teorema 4 è in corrispondenza con una seconda decomposizione, questa di carattere intrinsecamente analitico, indotta sull'operatore identità dello spazio di Hilbert associato $\Omega^\bullet_{L^2} M$. Tale decomposizione ammette una restrizione naturale in termini di operatori sugli spazi di forme lisce, oggetto del seguente teorema.

Teorema 5 (Teorema di Hodge)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g.

Allora esistono operatori lineari $G, H \colon \Omega^\bullet M \to \Omega^\bullet M$ tali che $[\mathrm{d}, G] = [\mathrm{d}^*, G] = [\Delta, G] = 0$ e

$$\mathrm{id}_{\Omega^\bullet M} = H + \Delta G.$$

L'operatore H coincide con il proiettore $\pi_{\mathcal{H}^\bullet}$ ed è pertanto detto *proiezione armonica di* M, l'operatore G *operatore di Green per* Δ *su* M.

Dimostrazione. Per una dimostrazione del presente risultato che faccia uso della teoria degli operatori ellittici su varietà differenziali, si rimanda a [2, teor. 3.15, p.15].

Per una dimostrazione di un risultato analogo per varietà complesse[1] che faccia uso della teoria elementare degli spazi di Hilbert e degli spazi di Sobolev si rimanda a [6, p. 84ss.]. In questa seconda dimostrazione è contenuta anche la prova del teorema 4 qui enunciato separatamente.

Ci si limita qui ad osservare che gli operatori G ed H precedentemente definiti sono identificabili in modo naturale come restrizioni, sugli spazi di forme lisce, di operatori definiti sugli spazi $\Omega^\bullet_{L^2}M$. ■

Sebbene possa apparire come un'ulteriore astrazione, il precedente teorema 5 fornisce uno strumento essenziale alla soluzione delle equazioni differenziali di tipo ellittico su varietà riemanniane; esso consente inoltre una dimostrazione relativamente semplice del seguente importante risultato, dal *flavour* squisitamente algebrico-geometrico, ma dal profondo significato analitico, noto come *teorema di isomorfismo di Hodge* (teorema 6). Di tale teorema si fornisce qui anche un secondo enunciato (teorema 7), opportunamente corredato da una dimostrazione (indipendente) più classica, la quale fa uso del solo teorema 4; un confronto tra gli enunciati è presentato in forma di osservazione, e posposto alle relative dimostrazioni ed alla seguente definizione.

Definizione. Siano $(A^\bullet, d_A)$, $(B^\bullet, d_B)$ due complessi di cocatene a coefficienti reali.

Un *morfismo* di tali complessi $f\colon (A^\bullet, d_A) \to (B^\bullet, d_B)$ è una collezione $(f_k)_k$ di applicazioni $\mathbb{R}$-lineari in ogni grado e tali che $d^k_B f_k = f_{k+1} d^k_A$ per ogni k.

Un *isomorfismo* di tali complessi è un morfismo che sia anche un isomorfismo di spazi vettoriali reali in ogni grado. Si indicherà

$$(A^\bullet, d_A) \underset{\mathsf{Kom}(\mathsf{Vect}_\mathbb{R})}{\cong} (B^\bullet, d_B).$$

Si indicherà inoltre con $H^\bullet(A^\bullet, d_A)$ il *complesso di coomologia astratta* associato ad $(A^\bullet, d_A)$, costituito dagli spazi

$$H^k(A^\bullet, d_A) \doteq \ker d^k_A \Big/ \operatorname{im} d^{k-1}_A \ .$$

Dato un morfismo di complessi f, si denoterà qui con $f^\sharp$ il morfismo[2] da questo indotto sui relativi complessi di coomologia astratta.

Per ulteriori complementi di algebra omologica si rimanda a [5].

Teorema 6 (Teorema di isomorfismo di Hodge)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g. Siano inoltre $\Omega^k M$ lo spazio delle k-forme lisce su M a valori reali e $\mathcal{H}^k M \doteq \ker \Delta^k$ lo spazio delle k-forme differenziali *armoniche* su M a valori reali.

Allora $\left(H^\bullet_{dR}M, \mathrm{d}^\sharp\right) \underset{\mathsf{Kom}(\mathsf{Vect}_\mathbb{R})}{\cong} (\mathcal{H}^\bullet M, \mathrm{d})$.

Dimostrazione. Si osservi che è possibile riscrivere la tesi del teorema 3 come

$$\Omega^\bullet_{L^2}M \underset{\mathsf{Hilb}_\mathbb{R}}{\cong} (\Omega^\bullet_{L^2}M)_0 \mathbin{\widehat{\oplus}} \widehat{\bigoplus}_{\lambda\neq 0} (\Omega^\bullet_{L^2}M)_\lambda$$

[1] Si veda a riguardo il capitolo successivo.

[2] Nel caso presente sarebbe improvvido denotare − come è tuttavia consuetudine − tale morfismo indotto con f^*.

dove ogni $\left(\Omega^\bullet_{L^2} M\right)_\lambda$ è finito-dimensionale ancora per il teorema 3. Tale decomposizione induce la decomposizione

$$\Omega^\bullet M \underset{\mathsf{preHilb}_\mathbb{R}}{\cong} (\Omega^\bullet M)_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} (\Omega^\bullet M)_\lambda \,. \tag{1}$$

Si vuole ora mostrare che tale decomposizione induce a sua volta una decomposizione nel complesso coomologico di de Rham $H^\bullet_{dR} M$. Si consideri allora il complesso

$$(\Omega^\bullet M, \mathrm{d}) \underset{\mathsf{Vect}_\mathbb{R}}{=} \left((\Omega^\bullet M)_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} (\Omega^\bullet M)_\lambda \,, \mathrm{d} \right)$$

e, passando in coomologia, il complesso

$$H^\bullet \left(\Omega^\bullet M, \mathrm{d}\right) = H^\bullet \left((\Omega^\bullet M)_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} (\Omega^\bullet M)_\lambda \,, \mathrm{d} \right).$$

Osservazione (Caveat)**.** Il lettore non deve essere tentato dal "commutare" la somma diretta con il funtore coomologico $H^\bullet$ e concludere la (co-)esattezza del complesso relativo ai soli λ-auto-k-spazi di autovalore non nullo grazie al teorema 4. La non-finito-dimensionalità del complesso costituisce infatti un impedimento a tale modo di procedere.

Si vuole ora provare che

$$H^\bullet \left(\Omega^\bullet M, \mathrm{d}\right) \underset{\mathsf{Vect}_\mathbb{R}}{\cong} H^\bullet \left((\Omega^\bullet M)_0 \,, \mathrm{d} \right), \tag{2}$$

esibendo direttamente l'isomorfismo. Siano dunque rispettivamente $\iota \colon (\Omega^\bullet M)_0 \to \Omega^\bullet M$ l'inclusione dello 0-autospazio nel complesso di forme, e $\pi \colon \Omega^\bullet M \to (\Omega^\bullet M)_0$ la sua inversa sinistra. L'isomorfismo cercato è allora proprio $\iota^\sharp$, e $\pi^\sharp$ è il suo inverso.

Risulta infatti

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{(\Omega^\bullet M)_0} &= \pi\iota \\
\left(\mathrm{id}_{(\Omega^\bullet M)_0}\right)^\sharp &= (\pi\iota)^\sharp && \text{(funtorialità controvariante di } \sharp) \\
\mathrm{id}_{H^\bullet\left((\Omega^\bullet M)_0, \mathrm{d}\right)} &= \iota^\sharp \pi^\sharp .
\end{aligned} \tag{3}$$

Si ha poi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(G\,\mathrm{d}^*) + (G\,\mathrm{d}^*)\,\mathrm{d} = & && ([G, \mathrm{d}] = [G, \mathrm{d}^*] = 0 \text{ per il teorema 5}) \\
= & \Delta G && \text{(teorema 5)} \\
= & \,\mathrm{id}_{\Omega^\bullet M} - H \\
= & \,\mathrm{id}_{\Omega^\bullet M} - \iota\pi .
\end{aligned}$$

Dal teorema di invarianza omotopica[3] [5, teor. 4.4, p. 129] segue dunque che

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_{\Omega^\bullet M})^\sharp &= (\iota\pi)^\sharp \\ \mathrm{id}_{H^\bullet(\Omega^\bullet M,\mathrm{d})} &= \pi^\sharp\iota^\sharp \\ \mathrm{id}_{H^\bullet_{dR}M} &= \pi^\sharp\iota^\sharp. \end{aligned} \tag{4}$$

Da (3) e (4) segue allora che $\iota^\sharp$ (ovvero $\pi^\sharp$) è un isomorfismo, dunque vale la (2), che può essere riscritta come

$$H^\bullet(\Omega^\bullet M,\mathrm{d}) \underset{\mathsf{Vect}_\mathbb{R}}{\cong} H^\bullet(\mathcal{H}^\bullet M,\mathrm{d}),$$

Essendo allora $\Delta = (\mathrm{d}+\mathrm{d}^*)^2$ definito positivo, le forme armoniche sono chiuse e cochiuse, dunque, a destra, $(\mathcal{H}^\bullet M,\mathrm{d}) = (\mathcal{H}^\bullet, 0)$, da cui $H^\bullet(\mathcal{H}^\bullet M,\mathrm{d}) = (\mathcal{H}^\bullet,\mathrm{d})$ per definizione di coomologia astratta.

D'altra parte, a sinistra, $H^\bullet(\Omega^\bullet M,\mathrm{d}) = H^\bullet_{dR}M$ per definizione di *coomologia di de Rham*, ovvero, conservando l'operatore indotto $\mathrm{d}^\sharp$,

$$\left(H^\bullet_{dR}M,\mathrm{d}^\sharp\right) \underset{\mathsf{Kom}(\mathsf{Vect}_\mathbb{R})}{\cong} (\mathcal{H}^\bullet,\mathrm{d})$$

che è la tesi. ■

Il teorema appena dimostrato generalizza il seguente risultato classico, del quale si presenta qui, per completezza, una dimostrazione alternativa.

Teorema 7 (del rappresentante armonico)**.** Sia (M,g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g. Siano inoltre $\Omega^k M$ lo spazio delle k-forme lisce su M a valori reali e $\mathcal{H}^k M \doteq \ker\Delta^k$ lo spazio delle k-forme differenziali *armoniche* su M a valori reali.

Allora $H^k_{dR}M \underset{\mathsf{Vect}_\mathbb{R}}{\cong} \mathcal{H}^k M$.

Dimostrazione. Si vuole mostrare che

$$\begin{aligned} h\colon \mathcal{H}^k M &\longrightarrow H^k_{dR}M \\ \omega &\longmapsto [\omega] \end{aligned}$$

è un'isomorfismo. La buona definizione di h segue dalla chiusura delle forme armoniche (come nel teorema 6), la linearità è banale.

L'iniettività di h segue dal teorema 4: data $\alpha \in \ker h$ si ha $\Delta\alpha = 0$ e $\alpha = \mathrm{d}\omega$, dunque $\alpha = 0$ essendo la decomposizione a intersezione banale.

Per la suriettività di h, segue ancora dal teorema 4 che ogni forma α si può scrivere come

$$\alpha = \alpha_\mathcal{H} + \mathrm{d}\alpha' + \mathrm{d}^*\alpha'',$$

[3] Siano $f,g\colon (A^\bullet,d_A)\to(B^\bullet,d_B)$ morfismi di complessi. Se esiste un morfismo P (detto *operatore di prisma*) tale che $d_BP + Pd_A = f - g$ in ogni grado, allora $f^\sharp = g^\sharp$.

dove $\alpha_{\mathcal{H}}$ è *armonica*. Data $[\alpha] \in H^k_{dR}M$ è allora sufficiente provare che $[\alpha] = [\alpha_{\mathcal{H}}] = h(\alpha_{\mathcal{H}})$, ovvero che $\mathrm{d}^*\alpha''$, la parte coesatta di α, è nulla. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 0 \,|\, \alpha'' \rangle && (\alpha \in \mathcal{Z}^k M) \\
&= \langle \mathrm{d}\alpha \,|\, \alpha'' \rangle && (\text{teorema 4}) \\
&= \langle \mathrm{d}(\alpha_{\mathcal{H}} + \mathrm{d}\alpha' + \mathrm{d}^*\alpha'') \,|\, \alpha'' \rangle \\
&= \left\langle \mathrm{d}\alpha_{\mathcal{H}} + \mathrm{d}^2\alpha' + \mathrm{d}\,\mathrm{d}^*\alpha'' \,\middle|\, \alpha'' \right\rangle && (\mathrm{d}\alpha_{\mathcal{H}} = 0, \mathrm{d}^2 = 0) \\
&= \langle \mathrm{d}\,\mathrm{d}^*\alpha'' \,|\, \alpha'' \rangle \\
&= \langle \mathrm{d}^*\alpha'' \,|\, \mathrm{d}^*\alpha'' \rangle \\
&= \|\mathrm{d}^*\alpha''\| \,.
\end{aligned}$$

■

Osservazione (dove si nota in modo arguto che $0 = 0$)**.** Gli enunciati dei teoremi 6 e 7 sono sottilmente differenti. A tale proposito si noti innanzitutto che l'operatore d induce in coomologia di de Rham l'applicazione nulla (ovvero $d^\sharp = 0$), essendo i gruppi di coomologia definiti da classi quoziente di forme chiuse; ne segue che il teorema 6 *non* è più forte del teorema 7, in quanto, dotando ciascuno spazio vettoriale $H^k_{dR}M$ dell'applicazione nulla $0_H \colon H^k_{dR}M \to H^{k+1}_{dR}M$ e ripetendo il ragionamento per lo spazio $\mathcal{H}^k M$ ed l'applicazione $0_{\mathcal{H}}$, gli isomorfismi tra spazi vettoriali provati in ogni grado nel teorema 7 determinano univocamente l'isomorfismo di complessi

$$\left(H^\bullet_{dR}M, \mathrm{d}^\sharp\right) = (H^\bullet_{dR}M, 0_H) \underset{\mathsf{Kom}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})}{\cong} (\mathcal{H}^\bullet M, 0_{\mathcal{H}}) = (\mathcal{H}^\bullet M, \mathrm{d}) \,,$$

poiché 0_H e $0_{\mathcal{H}}$ commutano con l'isomorfismo lineare h in ogni grado.

L'enunciato del teorema 6, tuttavia, fornisce una prospettiva più ampia e puntuale della ragione di un tale isomorfismo, asserendo in particolare che esso è determinato dall'applicazione nulla $\mathrm{d}^\sharp$ come indotta dal differenziale di de Rham (e non avulsa dal contesto, come sarebbe l'applicazione 0), nonché esplicitando l'inclusione degli spazi di forme armoniche $\mathcal{H}^\bullet M$ (dunque delle classi di coomologia di de Rham delle forme lisce) nel complesso $\Omega^\bullet M$ in relazione alla decomposizione spettrale di Δ data dal teorema 3.

Corollario 8 (Finito-dimensionalità coomologica per varietà riemanniane compatte)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g.

Allora tutti i suoi gruppi di coomologia hanno dimensione finita.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal teorema 7. ■

I risultati presentati in questo capitolo mantengono la loro validità se "complessificati" in maniera opportuna. A tale scopo è sufficiente introdurre

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}M \doteq \Omega^k_{C^\infty(\,\cdot\,,\mathbb{C})}M \underset{\mathsf{Vect}_{\mathbb{C}}(M)}{\cong} \Gamma(\Lambda^k M \otimes \mathbb{C})$$

lo *spazio delle k-forme lisce su M a valori complessi* e il prodotto *hermitiano*

$$\langle \omega \,|\, \eta \rangle \doteq \int_M \omega \wedge *\bar{\eta}\, \mathrm{dvol}_g,$$

per il quale si osservi che $\overline{*\eta} = *\bar{\eta}$. Riformulando tutte le definizioni presentate in conseguenza di queste ultime si può, ad esempio, dimostrare il seguente teorema di decomposizione di Hodge complesso, analogo del teorema 4.

Teorema (Teorema di decomposizione di Hodge complesso)**.** Sia (M, g) una *varietà riemanniana compatta, connessa, orientabile* di dimensione n, dotata di una metrica g. Siano inoltre $\Omega^k_{\mathbb{C}} M$ lo spazio delle k-forme lisce su M a valori complessi e $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}(M) \doteq \ker_{\mathbb{C}} \Delta^k$ lo spazio delle k-forme *armoniche* su M a valori complessi.

Allora lo spazio $\mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}(M)$ è finito-dimensionale e lo spazio $\Omega^k M$ si decompone come

$$\Omega^k_{\mathbb{C}} M = \mathcal{H}^k_{\mathbb{C}}(M) \oplus \mathrm{d}^{k-1} \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}} M \oplus (\mathrm{d}^*)^{k+1} \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}} M.$$

La presenza di una struttura complessa, tuttavia, non si riduce alla validità del precedente teorema, ed anzi consente di generalizzare alcuni dei risultati qui presentati ad altri operatori naturali su varietà complesse o kähleriane, come illustrato nei successivi capitoli.

Appendice: integrazione di forme vs. integrazione in misura e forme L^2

È opinione diffusa in geometria che, nel contesto delle varietà riemanniane orientabili, l'integrazione propriamente detta sia l'integrazione di *k-forme differenziali* su *k-cicli*. Questa indubbia verità può tuttavia essere trasposta *in modo rigoroso*, per quanto laborioso, in un contesto analitico, nel quale cioè l'integrazione è quella di *funzioni* rispetto a *misure*.

Solo nel contesto analitico è però possibile estendere la definizione di modo da formulare una teoria ben posta delle forme differenziali $\Omega^\bullet_{L^2}$.

A seguire si ragionerà sullo spazio $\Omega^n M$ di una varietà n-dimensionale come nelle ipotesi dei precedenti teoremi. Non è tuttavia difficile procedere nello stesso modo per forme di grado diverso.

Si consideri lo spazio $\Omega^n M$; esso è canonicamente identificabile, mediante l'operatore $*$ di Hodge, con lo spazio $\Omega^0 M = C^\infty(M)$ delle funzioni su M lisce a valori *reali*, il cui generico elemento è il coefficiente della forma rispetto al differenziale di volume dvol_g.

Dotando tale spazio della norma dell'estremo superiore $\|\cdot\|_\infty$, è possibile identificare $C^\infty(M)$ come un sottospazio denso dello spazio $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$ delle funzioni solamente continue su M. Sia allora φ un funzionale lineare continuo sullo spazio $(C^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)$; stante la densità dell'inclusione $(C^\infty(M), \|\cdot\|_\infty) \subset (C(M), \|\cdot\|_\infty)$ (che segue dal teorema di Stone-Weierstrass) e la continuità di φ, tale funzionale si può sempre estendere in modo unico ad un funzionale $\tilde{\varphi}$ definito su $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$ ed anch'esso lineare e continuo. Ne segue l'identità dei duali topologici $(C^\infty(M), \|\cdot\|_\infty)'$ e $(C(M), \|\cdot\|_\infty)'$.

Per compattezza di M segue allora dal teorema di rappresentazione di Riesz per spazi topologici localmente compatti di Hausdorff, che ogni funzionale φ è canonicamente ed univocamente associato ad una misura di Radon (con segno, a variazione totale finita) μ, definita sullo spazio topologico compatto soggiacente ad M. Non è difficile mostrare, sfruttando ancora la compattezza di M, che data una n-forma ω, univocamente identificata con il suo coefficiente $f \in C^\infty(M)$, il funzionale φ definito da

$$\varphi(f) \doteq \int_M f \,\mathrm{dvol}_g$$

è lineare e continuo. Ne segue che esso si rappresenta in modo unico con una misura, qui denotata con μ_g. Lo spazio $\Omega^n_{L^2} M$ precedentemente definito coincide allora con lo spazio delle funzioni $(M, \mathfrak{B}(M), \mu_g)$-misurabili a quadrato sommabile rispetto all'integrazione di Lebesgue nella misura μ_g definita sulla σ-algebra di Borel $\mathfrak{B}(M)$ indotta dalla topologia di M.

Con ulteriori ragionamenti è possibile affermare più in generale che le forme $\Omega^k_{L^2} M$ sono combinazioni lineari a coefficienti funzioni $(M, \mathfrak{B}(M), \mu_g)$-misurabili di una base del fibrato $\Lambda^k M$, sulle quali si richiedono ulteriori condizioni di sommabilità di tipo L^2.

Teoria di Dolbeault

a.c.d. Matilde Manzaroli

Coomologia di Dolbeault

Affronteremo ora la teoria di Dolbeault.

Siano (M, h, J) una varietà Hermitiana compatta di dimensione *complessa* n, e $\bar{\partial}$ l'operatore di Dolbeault, introdotto nei precedenti seminari, che agisce sullo spazio delle $(p,q)-$forme su M.

Come nella teoria di Hodge si introduce lo spazio delle $k-$forme complesse chiuse rispetto all'operatore differenziale, nella teoria di Dolbeault consideriamo lo spazio chiuso rispetto a $\bar{\partial}$: $\mathcal{Z}^{p,q}M$; e poiché $\bar{\partial}^2 = 0$ introduciamo i gruppi di coomologia di Dolbeault:

$$H^{p,q}M = \frac{\mathcal{Z}^{p,q}M}{\bar{\partial}\Omega^{p,q-1}M}.$$

Osservazione 9. La struttura complessa $J : TM \to TM$ è tale che $J^2 = -1$ e quindi obbliga la varietà ad essere di dimensione pari.

Osservazione 10. Contrariamente alla coomologia di de Rham quella di Dolbeault non è un invariante topologico poiché essa dipende dalla struttura complessa J.

Riscriviamo la forma del laplaciano di Dolbeault

$$\Delta^{\bar{\partial}} = \bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*$$

dove, ricordiamo, $\bar{\partial}^*$ è l'operatore aggiunto di $\bar{\partial}$ rispetto al prodotto hermitiano definito nel capitolo precedente.

Definizione 11. Definiamo lo spazio delle $(p,q)-$forme $\bar{\partial}$-armoniche su M come

$$\mathcal{H}^{p,q}M := \left\{ \omega \in \Omega^{p,q}M | \Delta^{\bar{\partial}}\omega = 0 \right\}.$$

Lemma 12. Sia ω una $(p,q) - forma$ allora è $\bar{\partial} - armonica \Leftrightarrow$ è $\bar{\partial}-$chiusa e $\bar{\partial}^*-$chiusa.

Dimostrazione. $\Leftarrow$: ovvia per definizione del laplaciano.

$\Rightarrow$: sia ψ una $(p,q)-$forma armonica allora

$$0 = \int_M H(\Delta^{\bar{\partial}}\psi, \psi)dv = \int_M H((\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*)\psi, \psi)dv = \int_M \left(|\bar{\partial}^*\psi|^2 + |\bar{\partial}\psi|^2\right)dv$$

■

Poiché è possibile mostrare che una forma $\omega \in \mathcal{Z}^{p,q}M$ è di norma minima nello spazio delle classi $\omega + \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}M \Leftrightarrow \bar{\partial}^*\omega = 0$, segue che $H^{p,q}M$ è rappresentato dalla soluzione di quest'equazione

$$\Delta^{\bar{\partial}}\omega = 0$$

Da quanto detto e per il *Lemma 12* intuiamo la possibile esistenza dell'isomorfismo

$$\mathcal{H}^{p,q}M \cong H^{p,q}M$$

che infatti, di pari passo con il caso di Hodge, seguirà dalla seguente decomposizione di Dolbeault.

Teorema 13. (Decomposizione di Dolbeault)
Lo spazio delle $(p,q) - forme$ su M si decompone in somma diretta come

$$\Omega^{p,q}M = \mathcal{H}^{p,q}M \bigoplus \bar{\partial}^*\Omega^{p,q+1}M \bigoplus \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}M$$

La dimostrazione consiste nel mostrare sia l'ortogonalità dei tre addendi, che discende dal *Lemma 12*, sia il fatto che la loro somma dia l'intero spazio delle $(p,q)-$forme su M, parte più corposa da affrontare analogamente al caso della teoria di Hodge, come visto nel teorema 4.

Ogni $\psi \in \Omega^{p,q}M$ è quindi scrivibile in modo unico come $\psi = \bar{\partial}\psi' + \bar{\partial}^*\psi'' + \psi^h$ dove $\psi' \in \Omega^{p,q-1}M$, $\psi'' \in \Omega^{p,q+1}$ e $\psi^h \in \mathcal{H}^{p,q}M$. Il secondo termine della decomposizione di Dolbeault è nullo nel caso in cui $\bar{\partial}\psi = 0$. Infatti per la decomposizione di Dolbeault si ha

$$0 = \left\langle \bar{\partial}\psi \,\middle|\, \psi'' \right\rangle = \left\langle \bar{\partial}\bar{\partial}^*\psi'' \,\middle|\, \psi'' \right\rangle = \int_M |\bar{\partial}^*\psi''|^2 dv.$$

Osservazione 14. Nel caso della decomposizione di Hodge avviene lo stesso: se $d\omega = 0$, dove $\omega = d\omega' + d^*\omega'' + \omega^H$ con $\omega' \in \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}M$, $\omega'' \in \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}M$ e $\omega^H \in \mathcal{H}^k(M,\mathbb{C})$, allora $d^*\omega'' = 0$.

Proposizione 15. (Isomorfismo di Dolbeault)
La mappa $\mathcal{H}^{p,q}M \xrightarrow{\varphi} H^{p,q}M$ tale che $\omega \mapsto [\omega]$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 7: osserviamo prima di tutto che tale mappa è ben definita poiché le forme armoniche sono $\bar{\partial}-$chiuse. Inoltre la mappa φ è iniettiva poiché $\mathcal{H}^{p,q}M \perp \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}$. Ci resta da dimostrare solo la suriettività.

Sia $c \in H^{p,q}M$ tale che $[\omega] = c$ dove ω è una forma $\bar{\partial}-$chiusa che rappresenta la classe c. Poiché $\bar{\partial}\omega = 0$ allora $\bar{\partial}^*\omega'' = 0$ e quindi ω ha forma $\omega^h + \bar{\partial}\omega'$. Ne segue che $[\omega] = [\omega^h]$ differendo di una forma $\bar{\partial}-$esatta. Ricordiamo che $\omega^h \in \mathcal{H}^{p,q}M$ rispetto alla decomposizione di Dolbeault quindi scegliamo proprio questa come controimmagine. Tale discorso vale per ogni elemento di $H^{p,q}M$ abbiamo quindi la suriettività. ■

Introduciamo i numeri di Hodge che denotano la dimensione complessa degli spazi $H^{p,q}M$. Non essendo la coomologia di Dolbeault un invariante topologico, parliamo infatti di numeri di Hodge rispetto alla struttura complessa J, non possiamo creare un parallelo con i numeri di Betti in generale ma vi sono comunque cose interessanti a riguardo.

Definizione 16. $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}M$.

Teorema 17. (Dualità di Serre)
Gli spazi $\mathcal{H}^{p,q}M$ e $\overline{\mathcal{H}^{n-p,n-q}M}$ sono isomorfi, dove $\dim M = n$. Ne segue, per il teorema di isomorfismo di Dolbeaut che $H^{p,q}M \cong \overline{H^{n-p,n-q}M}$, ovvero $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$.

Dimostrazione. consideriamo l'operatore $\bar{*}$ di Hodge come isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare

$$\bar{*} : \Omega^{p,q}M \longrightarrow \Omega^{n-p,n-q} \text{ tale che } \bar{*}\omega = *\bar{\omega}$$

Poiché l'inverso dello $*$ di Hodge è un multiplo dello $*$ stesso, si vede facilmente che lo stesso accade anche per l'operatore $\bar{*}$ appena definito, poiché $*$ è un operatore reale; basta dunque verificare che $\bar{*}$ preserva l'armonicità delle forme per dimostrare che l'isomorfismo $\bar{*}$ si restringe agli spazi delle forme armoniche.

$\bar{*}\Delta^{\bar{\partial}} = \Delta^{\bar{\partial}}\bar{*}$, quindi $\bar{*}_{|_{\mathcal{H}^{p,q}M}}$ è un isomorfismo da $\mathcal{H}^{p,q}M$ a $\overline{\mathcal{H}^{n-p,n-q}M}$. ■

Caso Kähleriano

Decomposizione

Sia (M, J, h) una varietà complessa hermitiana compatta di Kähler.

Per risultati del seminario precedente sappiamo che in tale situazione valgono le relazioni

$$2\Delta^{\bar\partial} = 2\Delta^{\partial} = \Delta \tag{5}$$

Proposizione 18. Sia M una varietà complessa hermitiana compatta e di Kähler, allora vale la seguente decomposizione

$$\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}M$$

Dimostrazione. Dimostriamo le due inclusioni. La prima, $\bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q} \subset \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$ è banale:

data $\omega \in \mathcal{H}^{p,q}M$, per la relazione (*5*), $\omega \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$.

La seconda, $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \subset \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}M$, segue dal fatto che $\Omega^k_{\mathbb{C}}M = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}M$. Infatti

$$\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \subset \Omega^k_{\mathbb{C}}M = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}M;$$

dunque per ogni $\psi \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$ abbiamo

$$\psi = \sum_{p+q=k} \psi^{p,q},$$

dove $\psi^{p,q} \in \Omega^{p,q}M$ e la scrittura è unica.

In conclusione, per la relazione (*5*), si ha

$$0 = \Delta^{\bar\partial}\psi = \sum_{p+q=k} \Delta^{\bar\partial}\psi^{p,q} \iff \Delta^{\bar\partial}\psi^{p,q} = 0$$

sempre per unicità della decomposizione. Ovvero ogni $\psi^{p,q}$ è $\bar\partial - armonica$. ■

Osservazione 19. Per la *Proposizione 18* e per i teoremi di isomorfismo visti per i gruppi di coomologia e gli spazi di forme armoniche abbiamo che

$$H^k_{dR}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}M$$

Osservazione 20. È interessante vedere che la decomposizione dell'*Osservazione 19* non dipende dalla metrica kähleriana scelta.

Dimostrazione. Sia $K^{p,q} = \Big\{ [\omega] \mid [\omega] = [\eta] \text{ dove } \omega \in \mathcal{Z}^{p+q}_{dR}M \text{ e } \eta \in \Omega^{p,q} \Big\} \subset H^k_{dR}(M, \mathbb{C})$ il sottospazio delle classi di coomologia (de Rham) rappresentabili con una forma chiusa di tipo (p, q).

Abbiamo che $H^{p,q}M \subset K^{p,q}$. Vogliamo mostrare che vale l'inclusione inversa.

Siano ω e η come nella definizione di $K^{p,q}$, possiamo quindi scrivere η in modo unico come $\eta = \alpha + \Delta\beta$ dove $\alpha \in \mathcal{H}^{p+q}$ e $\beta \in \Omega^{p+q}$. Allora, considerando la componente $(p, q)-$esima avremo che $\eta = \alpha^{p,q} + \Delta\beta^{p,q}$ con $\alpha^{p,q} \in \mathcal{H}^{p,q}$ (*Osservazione 19*). Poiché η è chiuso, per la *Osservazione 14*, abbiamo che $d^*d\beta^{p,q} = 0$ (ricordando che $\Delta = dd^* + d^*d$) e quindi $\eta = \alpha^{p,q} + dd^*\beta^{p,q}$.

Osserviamo per concludere che $[\omega] = [\eta] = [\alpha^{p,q}]$. ■

Osservazione 21. I numeri di Hodge in questo caso sono invarianti per cambiamento di metrica kähleriana.

Un caso particolare per cui si ha l'invarianza dei numeri di Hodge è quello delle superfici di Riemann, varietà complesse di dimensione complessa. Infatti sulle superfici di Riemann ogni 2-forma è chiusa; allora anche la 2-forma fondamentale della metrica è chiusa, quindi ogni metrica hermitiana su una superficie di Riemann è kähleriana. Inoltre abbiamo che su ogni superficie orientabile dotata di una metrica riemanniana possiamo definire una struttura complessa, cosicchè ogni 2-varietà reale orientabile può essere dotata di una struttura kähleriana.

Diamante di Hodge

Proposizione 22. Sia M una varietà complessa hermitiana di Kähler compatta. Allora

$$\mathcal{H}^{p,q}M \cong \overline{\mathcal{H}^{q,p}M}.$$

Dimostrazione. Ricordando che il coniugio $\bar{\cdot} : \Omega^{p,q}M \longrightarrow \Omega^{q,p}M$ è un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare, dall'*Osservazione 20* e dal fatto che $\overline{K^{q,p}} = K^{p,q}$, abbiamo la tesi. ■

Proposizione 23. Sia M una varietà complessa hermitiana di Kähler compatta. Allora

$$\mathcal{H}^{p,p}M \neq \{0\}\ \forall p = 0, ..., n.$$

Dimostrazione. Sia $\Omega \in \Omega^{1,1}M$ la forma di Kähler di M e per $p \in \mathbb{N}$ $\Omega^p \in \Omega^{p,p}M$. Vogliamo dimostrare che $\forall p$ Ω^p è armonica.

Sfrutteremo un procedimento induttivo:

$p = 0$(base induzione): Ω^0 è costantemente 1, quindi armonica poiché $d1 = d^*1 = 0$.

Supponiamo valga per p. Per $p+1$ consideriamo l'operatore di Lefschetz L, introdotto nel precedente seminario; sappiamo che questo commuta con il laplaciano $[L, \Delta] = 0$. Abbiamo quindi

$$\Delta\Omega^{p+1} = \Delta(\Omega \wedge \Omega^p) = \Delta L\Omega^p = L\Delta\Omega^p = 0$$

per ipotesi induttiva.

Inoltre abbiamo visto che $\Omega^n \neq 0$ è un multiplo della forma di volume di M e quindi $\Omega^p\ \forall p = 0, ..., n$. ■

Corollario 24. Sia M una varietà complessa hermitiana di Kähler compatta. Allora valgono:

(a) $H^k_{dR}(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}M$;
(b) $H^{p,q}M \cong \overline{H^{q,p}M}$;
(c) $H^{p,p}M \neq \{0\}\ \forall p = 0, ..., n$.

Corollario 25. Sia M una varietà complessa hermitiana di Kähler compatta. Allora valgono:

(1) $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$;
(2) $h^{p,q} = h^{q,p}$;
(3) $h^{p,p} > 0\ \forall p = 0, ..., n$.

In particolare osserviamo che i numeri di Betti di ordine dispari sono pari (per *(2)*) e quelli di ordine pari sono diversi da zero(per *(3)*).

Sulle varietà complesse kähleriane abbiamo quindi interessanti correlazioni tra i numeri di Betti e i numeri di Hodge. Rivediamole graficamente tramite il cosiddetto *diamante di Hodge*.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & h^{0,0} & & & \\
 & & h^{1,0} & & h^{0,1} & & \\
 & \iddots & & \vdots & & \ddots & \\
h^{n,0} & h^{n-1,1} & \cdots & h^{p,p} & \cdots & h^{1,n-1} & h^{0,n} \\
 & \ddots & & \vdots & & \iddots & \\
 & & h^{n,n-1} & & h^{n-1,n} & & \\
 & & & h^{n,n} & & &
\end{array}
$$

Osservazione 26. Tramite la dualità di Serre, nel caso di una varietà complessa hermitiana compatta, è possibile conoscere l'intero diamante conoscendone una metà.
Se la varietà è anche di Kähler basta conoscere un solo quarto del diamante poiché $h^{p,q} = h^{q,p}$; il k-esimo numero di Betti della varietà si ottiene sommando i coefficienti della k-esima riga del diamante e la linea verticale centrale ha tutti i coefficienti non nulli e, ricordando l'*Osservazione 20*, osserviamo che anche il diamante di Hodge non dipende dalla scelta della metrica kälheriana.

Concludiamo ora con un esempio.

Esempio 27. Consideriamo la varietà $M = S^1 \times S^3$ detta varietà di Hopf. Vogliamo mostrare tramite i risultati del *Corollario 25* che M è una varietà complessa non kähleriana.

Osserviamo che le sfere S^1, S^3 hanno dimensione dispari quindi esse non possono essere varietà complesse. Dunque per vedere che M è una varietà complessa procederemo altrimenti.
Si può vedere che la superficie di Hopf è un quoziente compatto di $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tramite l'azione libera di un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}$ che agisce per mezzo della trasformazione $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tale che $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$, $0 \neq \lambda_i \in \mathbb{C}$ di modulo minore di 1.
Procediamo passo per passo.
Consideriamo i seguenti diffeomorfismi

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times S^3$$

che associa $z \mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|}\right)$ e

$$\mathbb{R}^+ \times S^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times S^3$$

che associa $(x, s) \mapsto (log(x), s)$.
Componendoli otteniamo il seguente diffeomorfismo

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \times S^3$$

che manda $z \mapsto (log(|z|), \frac{z}{|z|})$.
Sia ora $w \in \mathbb{Z}$ e definiamo la trasformazione

$$w : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

che manda $(z_1, z_2) \mapsto (e^w z_1 . e^w z_2)$. Tale associazione, come avevamo precedentemente accennato è un'azione di gruppo e definisce quindi una relazione di equivalenza su $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.
Ora vediamo tale azione su $\mathbb{R} \times S^3$

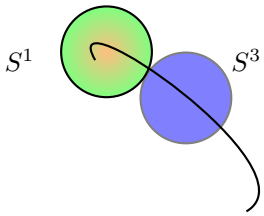
$$w(z) \mapsto \left(log(|e^w z|), \frac{e^w z}{|e^w z|}\right) = \left(w + log(|z|), \frac{z}{|z|}\right)$$

L'azione è quindi una traslazione solo sulla prima componente e $X := \dfrac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\mathbb{Z}}$ eredita la struttura complessa da $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Inoltre denotata con $\sim$ la relazione indotta su $\mathbb{R} \times S^3$ abbiamo che

$$X \cong \frac{\mathbb{R} \times S^3}{\sim} \cong S^1 \times S^3 = M$$

e dunque M eredita da tale diffeomorfismo una struttura complessa compatibile con la struttura differenziale.
Resta da vedere che M non è una varietà kähleriana. Utilizziamo la formula di Künneth per calcolare la coomologia

$$b_k(X \times Y) = \textstyle\sum_{p+q=k} b_p(X) b_q(Y).$$



(Lo stesso risultato si ottiene facilmente utilizzando la successione di Mayer-Vietoris).
Sappiamo che $b_k(S^n) = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 0, n \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ e quindi si ha

$$b_1(M) = 1 \text{ e } b_2(M) = 0.$$

Per il *Corollario 25* segue che M non è kähleriana. Infatti b_1 non è pari e b_2 è nullo!
Un'ulteriore osservazione riguardante $b_1 = h^{1,0} + h^{0,1} = 1 \Rightarrow h^{1,0} \neq h^{0,1}$.
($H^{0,1} \cong \mathbb{C}$ e $H^{1,0} \cong \{0\}$).

Osservazione 28. L'esempio fatto è un caso particolare delle varietà di Hopf $S^1 \times S^{2n-1}$. Per $n > 1$ abbiamo sempre una varietà non kähleriana mentre per $n = 1$ si ha il toro che è una varietà kähleriana.

Informalmente possiamo dire, come abbiamo notato nel corso dei seminari, che essere una varietà kähleriana porta ad avere molte "buone proprietà". Nel nostro caso abbiamo che i numeri di Hodge sono degli invarianti topologici (ovvero sono indipendenti dalla

metrica kähleriana) e che la coomologia di Dolbeault coincide con la coomologia di de Rham, seppur queste due sottolineino aspetti differenti delle varietà.

In altri casi "meno buoni" è possibile osservare come Dolbeault approssimi de Rham, o se vogliamo quanto manchi ad una coomologia per essere kähleriana, tramite la cosidetta successione spettrale o di Frölicher.

Coomologia di De Rham e Dolbeault nel contesto dei fasci

a.c.d. Leonardo Bagaglini

In questo paragrafo verranno definiti i fondamenti della teoria dei fasci allo scopo di enunciare e dimostrare i teoremi di de Rham e Dolbeault astratti. Seguiranno poi alcune considerazioni su varietà complesse compatte.
Le definizioni non vogliono essere le più generali possibili bensì funzionali al conseguimento dei nostri obiettivi.

Fasci e coomologia di Čech.

Sia M una varietà differenziale[4].

Definizione (Prefascio)**.** Siano Ab la categoria dei gruppi abeliani ed Open(M) la categoria degli aperti di M con inclusioni come morfismi.
Un *prefascio* su M a valori in Ab è un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \mathrm{Open}(M) \to \mathrm{Ab}$$

Per ogni aperto U di M il gruppo $\mathcal{F}(U)$ si dice gruppo delle *sezioni* del fascio $\mathcal{F}$ di U.
Per ogni morfismo di inclusione $V \xrightarrow{\iota} U$ il morfismo $\mathcal{F}(\iota)$ si dice *morfismo di restrizione*.
Se $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ indichiamo $\mathcal{F}(\iota)(\sigma) = \sigma|_V$.

Dato un prefascio $\mathcal{F}$ su M, per ogni $x \in M$ consideriamo $\mathbf{N}_x$ l'insieme degli intorni aperti di x. Questo è un reticolo rispetto alla relazione d'inclusione, pertanto possiamo definire il limite diretto

$$\varinjlim \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_x$$

del sistema diretto di gruppi abeliani $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathbf{N}_x}$.

Definizione (Spiga)**.** La *spiga* in x del prefascio $\mathcal{F}$ è il gruppo $\mathcal{F}_x$.
Gli elementi di una spiga $\mathcal{F}_x$ si dicono *germi* di $\mathcal{F}$ in x.

Definizione (Fascio)**.** Un *fascio* sulla varietà M a valori nella categoria Ab è un prefascio $\mathcal{F}$ tale che verifichi le seguenti proprietà:

i. Per ogni coppia di aperti U, V di M e sezioni $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$ tali che $\sigma|_{U\cap V} = \tau|_{U\cap V}$ allora esiste $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$ che verifica $\rho|_U = \sigma$ ed $\rho|_V = \tau$;

ii. Per ogni coppia di aperti U, V di M e sezione $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ tale che $\sigma|_U = 0$ ed $\sigma|_V = 0$ allora $\sigma = 0$.

Osservazione. Esempi notevoli di fasci sono dati dalle seguenti corrispondenze:
per ogni aperto U di M.

1. $\underline{\mathbb{K}}(U) = \{f \in C^\infty(U, \mathbb{K}) \,|\, df = 0\}$ dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
2. $\Omega^p U \quad p \geq 0 \quad$ ($p-$forme su U);

[4] Spazio localmente euclideo, di Hausdorff, a base numerabile, paracompatto dotato di un atlante di classe C^∞.

3. $\mathcal{Z}_d^p U = Z_d^p U \quad p \geq 1 \quad$ ($p-$forme $d-$chiuse su U);

Se inoltre M è una varietà complessa[5]

1. $\mathcal{O}(U) \quad$ (funzioni olomorfe su U);
2. $\Omega^{p,q} U \quad p,q \geq 0 \quad$ ($(p,q)-$forme su U);
3. $\mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{p,0} U = Z_{\overline{\partial}}^{p,0} U \quad p \geq 1 \quad$ (p-forme olomorfe su U);
4. $\mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{p,q} U = Z_{\overline{\partial}}^{p,q} U \quad p \geq 0,\ q \geq 1 \quad$ ((p,q)-forme $\overline{\partial}$-chiuse su U);

Definizione (Morfismo di fasci)**.** Un *morfismo* di due fasci sulla stessa varietà è una trasformazione naturale tra di essi.

Osservazione. Se $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}$ è un morfismo di fasci allora per ogni $x \in M$ resta definito un morfismo (denotato ancora con α)

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}_x$$

tra le rispettive spighe.

Consideriamo un morfismo di fasci su M

$$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$$

Per ogni aperto U di M possiamo definire

$$\mathrm{Ker}(\alpha)(U) = \mathrm{Ker}\left(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha|_U} \mathcal{E}(U)\right)$$

Sia invece $\{U_j\}_{j\in I}$ un ricoprimento aperto di U e $\sigma_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che per ogni $j,k \in I$ si abbia $\sigma_j|_{U_j\cap U_k} - \sigma_k|_{U_j\cap U_k} \in \alpha|_{U_j\cap U_k}(\mathcal{F}(U_j \cap U_k))$. Consideriamo l'insieme $\mathrm{qCoker}(\alpha)(U)$ delle coppie (U_j, σ_j) al variare dei ricoprimenti e di siffatte sezioni. Introduciamo poi la relazione di equivalenza $\sim$ in modo che $(U_j,\sigma_j) \sim \left(U'_{j'}, \sigma'_{j'}\right)$ se e solo se per ogni $p \in U_j \cap U'_{j'}$ esiste $V \subset U_j \cap U'_{j'}$ intorno di p tale che $\sigma_j|_V - \sigma'_{j'}|_V \in \alpha|_V \mathcal{F}(V)$. Definiamo infine

$$\mathrm{Coker}(\alpha)(U) = \mathrm{qCoker}(\alpha)(U)/\sim$$

Definizione (Fasci indotti da un morfismo)**.** Le corrispondenze

$$U \mapsto \mathrm{Ker}(\alpha)(U), \quad U \mapsto \mathrm{Coker}(\alpha)(U)$$

definiscono due fasci, sulla varietà M, che denotiamo con $\mathrm{Ker}(\alpha)$ e $\mathrm{Coker}(\alpha)$.

Definizione (Successione esatta corta di fasci)**.** Una successione di fasci sopra M

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

si dice *esatta corta* se $\beta \circ \alpha = 0,\ \mathcal{E} = \mathrm{Ker}(\beta)$ e $\mathcal{G} = \mathrm{Coker}(\alpha)$.

[5] Varietà differenziabile dotata di una struttura complessa J.

Osservazione. Se

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

è una successione esatta corta di fasci su M ed U un aperto di M, allora la successione di gruppi

$$0 \to \mathcal{E}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{G}(U) \to 0$$

è esatta nei primi due punti, ma in generale può non esserlo in $\mathcal{G}(U)$. Invece si può verificare che è *localmente esatta*, nel senso che per ogni sezione $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ e per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno $V \subset U$ di p tale che $\sigma|_V \in \beta|_V(\mathcal{F}(V))$. Inoltre una successione corta di fasci con questa proprietà è una successione esatta corta.

Definizione (Successione esatta di fasci)**.** Più in generale una successione di fasci

$$... \xrightarrow{\alpha_{r-2}} \mathcal{F}_{r-1} \xrightarrow{\alpha_{r-1}} \mathcal{F}_r \xrightarrow{\alpha_r} \mathcal{F}_{r+1} \xrightarrow{\alpha_{r+1}} ...$$

si dice *esatta* se per ogni r vale $\alpha_{r+1} \circ \alpha_r = 0$ e la successione corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha_r) \xrightarrow{\iota_r} \mathcal{F}_r \xrightarrow{\alpha_r} \mathrm{Ker}(\alpha_{r+1}) \to 0$$

è esatta.

Osservazione. Si può facilmente dimostrare che una successione di fasci è esatta se e solo se la successione indotta sulle spighe sopra ciascun punto è esatta.

Passiamo ora a definire la coomologia a coefficienti in un fascio. Per far questo fissiamo un fascio $\mathcal{F}$ sulla varietà M.

Consideriamo $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ un ricoprimento aperto di M ed indichiamo con $U_{j_0 ... j_q} = U_{j_0} \cap ... \cap U_{j_q}$ al variare di $q \in \mathbb{N}$ e $j_0, ..., j_q \in I$. Definiamo ora, per ogni $q \in \mathbb{N}$, il gruppo

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Pi_{j_0 \neq ... \neq j_q} \mathcal{F}(U_{j_0 ... j_q})$$

ed i morfismi di gruppi

$$\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

$(\delta\sigma)_{j_0 ... j_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \sigma_{j_0 ... \widehat{j_k} ... j_{q+1}}|_{U_{j_0 ... j_{q+1}}}$.

Osservazione. Si può verificare che la coppia $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ definisce un complesso graduato di cocatene con differenziale di grado 1.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento)**.** Il complesso appena definito si dice *complesso di cocatene* a coefficienti in $\mathcal{F}$ del ricoprimento $\mathcal{U}$.
Indichiamo con $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il gruppo dei $q-$cocicli, con $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il gruppo dei $q-$cobordi e con $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ il suo $q-$esimo gruppo di coomologia.

Osserviamo che per ogni coppia di ricoprimenti di M possiamo sempre trovare un terzo ricoprimento che sia un raffinamento di entrambi. Consideriamo ora un raffinamento $\mathcal{V}$ del ricoprimento $\mathcal{U}$. Allora il differenziale δ commuta con il morfismo di complessi

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

indotto dai morfismi di restrizione. Restano pertanto definiti i morfismi in coomologia

$$H^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{r_{\mathcal{U},\mathcal{V}}} H^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

Inoltre se $\mathcal{W}$ è un raffinamento di $\mathcal{V}$ risulta

$$r_{\mathcal{V},\mathcal{W}} \circ r_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = r_{\mathcal{U},\mathcal{W}}$$

In altre parole, per ogni $q \in \mathbb{N}$, l'insieme $\{H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \,|\, \mathcal{U} \text{ ricoprimento di } M\}$ è un sistema diretto di gruppi abeliani. Possiamo quindi definire il suo limite diretto

$$H^q(M,\mathcal{F}) = \varinjlim H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

Definizione (Gruppi di coomologia di Čech)**.** Il gruppo $H^q(M,\mathcal{F})$ è il $q-esimo\ gruppo\ di\ coomologia\ di$ Čech di $\mathcal{F}$ su M.

La definizione di gruppi di coomologia di Čech può risultare scomoda e difficilmente utilizzabile in pratica perciò, tendenzialmente, si ricercano delle ipotesi che un ricoprimento $\mathcal{U}$ deve soddisfare affinché

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = H^q(M,\mathcal{F})$$

Un risultato che risponde a questa esigenza è il seguente teorema, di cui non presentiamo la dimostrazione.

Teorema 29 (Teorema di Leray)**.** [6] Se il ricoprimento $\mathcal{U}$ è aciclico per $\mathcal{F}$, cioè

$$H^q(U_{j_0\dots j_q},\mathcal{F}) = 0 \ \ \forall q > 0, \ \ \forall j_0,\dots,j_q \in I$$

allora

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = H^q(M,\mathcal{F})$$

Consideriamo ora una successione esatta corta di fasci

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

Le mappe indotte da α e β su i complessi

$$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha} C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

commutano con i differenziali e pertanto passano in coomologia

$$H^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha} H^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \quad H^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} H^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

Inoltre è possibile definire una morfismo

$$H^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{E}) \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

per cui vale il

Teorema 30. [7] Se

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

è una successione esatta corta di fasci su M, allora

$$\begin{aligned}(6)\quad 0 \to H^0(M,\mathcal{E}) \to H^0(M,\mathcal{F}) \to H^0(M,\mathcal{G}) \to H^1(M,\mathcal{E}) \to \dots \\ \dots \to H^q(M,\mathcal{E}) \to H^q(M,\mathcal{F}) \to H^q(M,\mathcal{G}) \to H^{q+1}(M,\mathcal{E}) \to \dots\end{aligned}$$

[6] Per una dimostrazione si consulti ad esempio [4]
[7] Per una dimostrazione si consulti ad esempio [6] oppure [4].

è una successione esatta di gruppi.

Osservazione. Nel teorema precedente se consideriamo i fasci a valori nella categoria dei $\mathbb{K}-$spazi vettoriali $\mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$, dove $\mathbb{K}$ è un campo, allora la successione 6 è una successione esatta di $\mathbb{K}-$spazi vettoriali.

Definizione (Fascio fine)**.** Un fascio $\mathcal{F}$ su M si dice *fine* se per ogni aperto U di M e ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in I}$ di U esiste una famiglia di morfismi $\{\eta_j : \mathcal{F}(U_j) \to \mathcal{F}(U)\}_{j\in I}$, chiamati *partizione dell'unità*, tali che

i. per ogni $\sigma \in \mathcal{F}(U_j)$ si ha $\eta_j\sigma = 0$ in un intorno aperto di $U \setminus U_j$;

ii. per ogni $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ si ha $\sum_j \eta_j\sigma|_{U_j} = \sigma$.

Proposizione 31. Se $\mathcal{F}$ è un fascio fine su M allora

$$H^q(M, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall q > 0$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di M, $q > 0$ e $\sigma \in Z^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Definiamo $\tau \in C^{q-1}(\mathcal{V}, \mathcal{F})$

$$\tau_{j_0\dots j_{q-1}} = \sum_k \eta_k \sigma_{k j_0\dots j_{q-1}}$$

dove η_k sono i morfismi della definizione di fascio fine in cui $U = V_{j_0\dots j_{q-1}}$ ed $U_j = V_{j j_0\dots j_{q-1}}$.
Risulta che $\delta\tau = \sigma$ e quindi $H^q(\mathcal{V}, \mathcal{F}) = 0$. ■

Corollario 32. Sia M una varietà differenziabile (risp. complessa) ed $\mathcal{F}$ il fascio

$$\Omega^p \text{ (risp. } \Omega^{p,q})$$

allora $\mathcal{F}$ è fine, di conseguenza

$$H^r(M, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall r > 0$$

Dimostrazione. Nella categoria delle varietà differenziabili la paracompattezza ci assicura che ogni ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di un aperto U di M ammette un raffinamento localmente finito $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in I}$ per cui esiste una partizione dell'unità $\{\varphi_j\}_{j\in I} \subset C^\infty(U)$ ad esso subordinata. Per ogni aperto V di M lo spazio $\Omega^p V$ è un $C^\infty(V) -$ modulo, pertanto possiamo definire $\eta_j : \Omega^p U_j \ni \omega \mapsto \varphi_j\omega \in \Omega^p U$. Tale $\{\eta_j\}_{j\in I}$ è una partizione dell'unità nel senso della definizione di fascio fine. ■

Osservazione. L'argomento utilizzato nel corollario 32 resta valido nelle ipotesi che $\mathcal{F}$ sia un $C^\infty-$modulo. In altre parole se per ogni U aperto di M il gruppo $\mathcal{F}(U)$ è un $C^\infty(U)-$modulo.

I teoremi di De Rham e Dolbeault astratti.

Teorema 33 (De Rham)**.** Sia M una varietà differenziabile ed $\underline{\mathbb{R}}$ il fascio delle funzioni localmente costanti su M. Allora

$$H^q(M,\underline{\mathbb{R}}) \cong H^q_{dR}(M) \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Sia $q > 0$.

Definiamo per ogni $p \in \mathbb{N}$ il fascio Ω^p ed il sottofascio $\underline{\mathbb{R}}$ di Ω^0 su M. Per il lemma di Poincaré-Volterra la successione

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\iota} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Omega^p \xrightarrow{d} ...$$

è la risoluzione del fascio $\underline{\mathbb{R}}$ (in altre parole è esatta), quindi le

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\iota} \Omega^0 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1_d \to 0$$
$$...$$
$$0 \to \mathcal{Z}^p_d \xrightarrow{\iota} \Omega^p \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{p+1}_d \to 0$$
$$...$$

sono successioni esatte corte di fasci.

Per ciascuna di esse consideriamo la successione esatta dei gruppi di coomologia 6. Grazie al corollario 32 i gruppi $H^q(M,\Omega^p)$ sono nulli. Possiamo quindi ricavare i seguenti isomorfismi

$$\begin{aligned} H^q(M,\underline{\mathbb{R}}) \cong & H^{q-1}(M,\mathcal{Z}^1_d) \cong ... \\ ... \cong & H^1(M,\mathcal{Z}^{q-1}_d) \cong \frac{H^0(M,\mathcal{Z}^q_d)}{dH^0(M,\Omega^{q-1})} = \frac{Z^q_d M}{d\Omega^{q-1}M} = H^q_{dR}(M) \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato le uguaglianze

$$H^0(M,\mathcal{Z}^q_d) = \varinjlim H^0(\mathcal{U},\mathcal{Z}^q_d) = \varinjlim Z^0(\mathcal{U},\mathcal{Z}^q_d) = \varinjlim Z^q_d M \equiv Z^q_d M$$

$$H^0(M,\Omega^{q-1}) = \varinjlim H^0(\mathcal{U},\Omega^{q-1}) = \varinjlim Z^0(\mathcal{U},\Omega^{q-1}) = \varinjlim \Omega^{q-1}M \equiv \Omega^{q-1}M$$

Se $q = 0$ si verifica immediatamente

$$H^0(M,\underline{\mathbb{R}}) = \varinjlim Z^0(\mathcal{U},\underline{\mathbb{R}}) \equiv Z^0_d(M) = H^0_{dR}(M)$$

■

Teorema 34 (Dolbeault)**.** Sia M una varietà complessa, $\mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}$ il fascio delle $p-$forme olomorfe su M e $\overline{\partial}$ l'operatore di Dolbeault. Allora

$$H^q(M,\mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}) \cong H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \quad \forall p,q \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Definiamo per ogni $p,q \in \mathbb{N}$ il fascio $\Omega^{p,q}$ ed il sottofascio $\mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}$ di $\Omega^{p,0}$ su M. Per il lemma di Dolbeault la successione

$$0 \to \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}} \xrightarrow{\iota} \Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} ... \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$$

è la risoluzione del fascio $\mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}$, quindi le

$$0 \to \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}} \xrightarrow{\iota} \Omega^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}^{p,1}_{\overline{\partial}} \to 0$$

$$...$$

$$0 \to \mathcal{Z}^{p,q}_{\overline{\partial}} \xrightarrow{\iota} \Omega^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{Z}^{p,q+1}_{\overline{\partial}} \to 0$$

$$...$$

sono successioni esatte corte di fasci.

Per ciascuna di esse consideriamo la successione esatta dei gruppi di coomologia 6. Grazie al corollario 32 i gruppi $H^r(M, \Omega^{p,q})$ sono nulli per ogni $r > 0$. Possiamo quindi ricavare i seguenti isomorfismi per $q > 0$

$$\begin{aligned} H^q(M, \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}) \cong & H^{q-1}(M, \mathcal{Z}^{p,1}_{\overline{\partial}}) \cong ... \\ ... \cong & H^1(M, \mathcal{Z}^{p,q-1}_{\overline{\partial}}) \cong \frac{H^0(M, \mathcal{Z}^{p,q}_{\overline{\partial}})}{\overline{\partial} H^0(M, \Omega^{p,q-1})} = \frac{Z^{p,q}_{\overline{\partial}} M}{\overline{\partial} \Omega^{p,q-1} M} = H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \end{aligned}$$

Dove abbiamo utlizzato le uguaglianze

$$H^0(M, \mathcal{Z}^{p,q}_{\overline{\partial}}) = \varinjlim H^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^{p,q}_{\overline{\partial}}) = \varinjlim Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^{p,q}_{\overline{\partial}}) = \varinjlim Z^{p,q}_{\overline{\partial}} M \equiv Z^{p,q}_{\overline{\partial}} M$$

$$H^0(M, \Omega^{p,q-1}) = \varinjlim H^0(\mathcal{U}, \Omega^{p,q-1}) = \varinjlim Z^0(\mathcal{U}, \Omega^{p,q-1}) = \varinjlim \Omega^{p,q-1} M \equiv \Omega^{p,q-1} M$$

Se $q = 0$ si verifica immediatamente

$$H^0(M, \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}) = \varinjlim Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}) \equiv Z^{p,0}_{\overline{\partial}}(M) = H^{p,0}(M)$$

■

Teoria di Dolbeault e varietà complesse compatte.

Lemma 35. Sia M una varietà complessa, U un suo aperto, $\alpha \in Z^{p+1,0}_d U$ con $p \in \mathbb{N}$, allora per ogni $x \in U$ esistono un aperto $V \subset U$ ed una forma $\beta \in Z^{p,0}_{\overline{\partial}} V$ tali che $x \in V$ e $d\beta = \alpha|_V$.

Dimostrazione. Per il lemma di Poincaré-Volterra possiamo supporre senza perdita di generalità l'esistenza di una forma $\beta \in \Omega^p_{\mathbb{C}} U$ tale che $d\beta = \alpha$.
Se $p = 0$ la forma β è olomorfa e soddisfa $d\beta = \alpha$.
Se $p > 0$ la forma β ammette decomposizione in parti omogenee $\sum_{k=0}^{p} \beta^{p-k,k}$ dove $\beta^{p-k,k} \in \Omega^{p-k,k} U$. Osserviamo che

$$d\beta = \alpha \iff \begin{cases} \partial \beta^{p,0} = \alpha \\ \overline{\partial} \beta^{p-k,k} + \partial \beta^{p-k-1,k+1} = 0 \quad k = 0, ..., p-1 \\ \overline{\partial} \beta^{0,p} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Mostriamo ricorsivamente che per $h = 0, ..., p-1$ esistono forme locali $\gamma_h \in \Omega^{h,p-h-1} V$ in un intorno V e $\gamma_{-1} = 0$ tali che $\beta^{h,p-h} = \overline{\partial} \gamma_h + \partial \gamma_{h-1}$.

$h = 0$ Definiamo $\gamma_{-1} = 0$.
La forma $\beta^{0,p}$ soddisfa $\overline{\partial} \beta^{0,p} = 0$, quindi è localmente $\overline{\partial}-$esatta per il lemma di Dolbeault,

perciò esiste $\gamma_0 \in \Omega^{0,p-1}V$ in un intorno V tale che

$$\beta^{0,p} = \overline{\partial}\gamma_0$$

$0 \leq h < p-1$ Supponiamo di aver costruito per ogni $0 \leq h < p-1$ forme locali γ_h come sopra, in particolare $\beta^{h,p-h} = \overline{\partial}\gamma_h + \partial\gamma_{h-1}$.
Dal sistema 7 ricaviamo

$$0 = \overline{\partial}\beta^{h+1,p-h-1} + \partial\beta^{h,p-h} = \overline{\partial}\beta^{h+1,p-h-1} + \partial(\overline{\partial}\gamma_h + \partial\gamma_{h-1}) = \overline{\partial}(\beta^{h+1,p-h-1} - \partial\gamma_h)$$

Di nuovo per il lemma di Dolbeault (restringendo ulteriormente l'aperto V se necessario) esiste $\gamma_{h+1} \in \Omega^{h+1,p-h-2}V$ tale che

$$\overline{\partial}\gamma_{h+1} = \beta^{h+1,p-h-1} - \partial\gamma_h$$

Possiamo ora definire la forma locale $\eta \in Z^{p,0}_{\overline{\partial}}V$ come $\eta = \beta^{p,0} - \partial\gamma_{p-1}$.
Dal sistema 7 infatti $\overline{\partial}\eta = \overline{\partial}\beta^{p,0} + \partial\beta^{p-1,1} = 0$. Inoltre $d\eta = \partial\eta = \partial\beta^{p,0} = \alpha$. ■

Consideriamo M^{2n} una varietà complessa compatta di dimensione reale $2n$. Su M è possibile definire il complesso di Dolbeault di grado $p \in \mathbb{N}$

$$0 \to \Omega^{p,0}M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,1}M \xrightarrow{\overline{\partial}} ... \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q-1}M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{p,q}M \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$$

a cui corrispondono i gruppi di coomologia di Dolbeault $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$. Tali gruppi sono naturalmente dei $\mathbb{C}$-spazi vettoriali di dimensione finita (dalla compattezza di M).

Definizione (Numeri di Hodge)**.** Definiamo i *numeri di Hodge* di M come

$$h_{p,q} = \dim_{\mathbb{C}}\left(H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)\right) \quad p,q \in \mathbb{N}$$

È possibile mostrare che gli $h_{p,q}$, in generale, non sono degli invarianti topologici di M[8] , ma può accadere che alcune combinazioni lineari di essi lo siano. A tal proposito mostriamo il seguente risultato

Teorema 36. Sia M^{2n} una varietà complessa compatta di dimensione reale $2n$. Indichiamo con $\chi(M)$ la sua caratteristica di Eulero-Poincaré e con $h_{p,q}$ i suoi numeri di Hodge. Allora risulta

$$\chi(M) = \sum_{p,q=1}^{n} (-1)^{p+q} h_{p,q}$$

Dimostrazione. Per ogni $p \in \mathbb{N}$ definiamo i fasci $\mathcal{Z}^{p,0}_d$, dei germi di $(p,0)-$forme $d-$chiuse $\alpha \in \Omega^{p,0}_{\mathbb{C}}M$, ed $\mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}$, delle $p-$forme olomorfe, su M.

Osserviamo che $\mathcal{Z}^{p,0}_d$ è un sottofascio di $\mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}$. Infatti preso un aperto U di M ed $\alpha \in \Omega^{p,0}U$ tale che $d\alpha = 0$ allora $\overline{\partial}\alpha = 0$, cioè $\alpha \in \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}}U$.

Consideriamo ora la successione di fasci

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{Z}^{0,0}_{\overline{\partial}} \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}} \xrightarrow{d} ...$$

Per il lemma 35 questa è la risoluzione del fascio $\underline{\mathbb{C}}$, quindi le

$$0 \to \mathcal{Z}^{p,0}_d \xrightarrow{\iota} \mathcal{Z}^{p,0}_{\overline{\partial}} \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{p+1,0}_d \to 0$$

[8] Si consulti ad esempio [11]

sono esatte ed inducono le successioni esatte lunghe in coomologia 6

$$... \to H^q(M, \mathcal{Z}_d^{p,0}) \to H^q(M, \mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{p,0}) \to H^q(M, \mathcal{Z}_d^{p+1,0}) \to H^{q+1}(M, \mathcal{Z}_d^{p,0}) \to ...$$

Dal teorema 34 ricaviamo isomorfismi $H^q(M, \mathcal{Z}_{\overline{\partial}}^{p,0}) \cong H_{\overline{\partial}}^{p,q} M$. Se indichiamo con $b_{p,q} = \dim_{\mathbb{C}}(H^q(M, \mathcal{Z}_d^{p,0}))$ dalla formula dei ranghi ricaviamo

$$0 = \sum_{q=0}^{2n-p} (-1)^q (b_{p,q} - h_{p,q} + b_{p+1,q})$$

Moltiplicando per $(-1)^p$ e sommando membro a membro su tutti i p otteniamo

$$0 = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \sum_{q=0}^{2n-p} (-1)^q (b_{p,q} - h_{p,q} + b_{p+1,q}) = \sum_{q=0}^{2n} (-1)^q b_{o,q} - \sum_{p,q=0}^{n} (-1)^{p+q} h_{p,q}$$

Osservando che $\mathcal{Z}_d^{0,0} = \underline{\mathbb{C}}$ grazie al teorema 33 unito al teorema dei coefficienti universali ricaviamo $b_{o,q} = \dim_{\mathbb{C}}(H_{dR}^q(M, \mathbb{C}))$ e di conseguenza

$$\chi(M) = \sum_{p,q=1}^{n} (-1)^{p+q} h_{p,q}$$

■

Possiamo inoltre ricavare una limitazione dei numeri di Betti di una varietà complessa compatta in funzione dei suoi numeri di Hodge. Specificatamente vale il seguente

Teorema 37. Sia M^{2n} è una varietà complessa compatta di dimensione reale $2n$. Indichiamo con b_r i suoi numeri di Betti e con $h_{p,q}$ i suoi numeri di Hodge. Allora risulta

$$b_r \leq \sum_{p+q=r} h_{p,q}$$

Dimostrazione. Definiamo per ogni $p \in \mathbb{N}$ e per ogni $0 \neq r \in \mathbb{N}$ il $\mathbb{C}-$spazio vettoriale

$$\Omega^{p;(r)} M = \sum_{h=0}^{r} \Omega^{p+h,r-h} M$$

e consideriamo i complessi di cocatene $\left(\Omega^{p;(\bullet)} M, d\right)$.

Sia ora $0 \leq p \leq n$ e $p \leq r \leq 2n$.

Osserviamo che le mappe

$$\Omega^{p;(r-p)} M \ni \alpha = \sum_{h=0}^{r-p} \alpha^{p+h,r-p-h} \mapsto A_{p,r-p}(\alpha) = \alpha^{p,r-p} \in \Omega^{p,r-p} M$$

definiscono morfismi tra complessi di $\mathbb{C}-$spazi vettoriali

$$\left(\Omega^{p;(\bullet)} M, d\right) \xrightarrow{A_{p,\bullet-p}} \left(\Omega^{p,\bullet-p} M, \overline{\partial}\right)$$

perciò inducono i morfismi in coomologia

$$H_d^{p;(r-p)}(M) \xrightarrow{A_{p,r-p}} H_{\overline{\partial}}^{p,r-p}(M) \tag{8}$$

e per $p = n$ gli isomorfismi

$$H_d^{n;(r-n)}(M) \cong H_{\overline{\partial}}^{n,r-n}(M) \tag{9}$$

Consideriamo poi le inclusioni $\Omega^{p+1;(r-p-1)}M \to \Omega^{p;(r-p)}M$.
Le indotte in coomologia sono suriettive su $\mathrm{Ker}(A_{p,r-p})$

$$H_d^{p+1;(r-p-1)}(M) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\left(A_{p,r-p} : H_d^{p;(r-p)}(M) \to H_{\overline{\partial}}^{p,r-p}(M)\right) \tag{10}$$

Se indichiamo con $b_{p;r}$ la dimensione complessa di $H_d^{p;(r-p)}(M)$ grazie a 8 ricaviamo

$$b_{p;r-p} \leq h_{p,r-p} + \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}(A_{p,r-p})$$

e quindi per 10

$$b_{p;r-p} \leq h_{p,r-p} + b_{p+1;r-p-1}$$

da cui, sommando membro a membro, otteniamo

$$\sum_{p=0}^{n-1} b_{p;r-p} \leq \sum_{p=0}^{n-1} h_{p,r-p} + \sum_{p=1}^{n} b_{p;r-p}$$

Ricordando infine che $b_{0;r} = b_r$ e, in virtù di 9, $b_{n;r-n} = h_{n,r-n}$, possiamo concludere

$$b_r \leq \sum_{p=0}^{n} h_{p,r-p}$$

■

Riferimenti bibliografici

[1] Berline, Nicole, Getzler, Ezra e Vergne, Michèle: *Heat Kernels and Sirac Operators*. Springer Verlag, 1996.

[2] Bertin, José, Demailly, Jean-Pierre, Illusie, Luc e Peters, Chris: *Introduction to Hodge Theory*. American Mathematical Society, 2002.

[3] Bott, Raoul e Tu, Loring W.: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer Verlag, 1982.

[4] Bracci, Filippo: *Teoria dei fibrati*. Nel *Lezioni di Teoria dei Fibrati*.

[5] Eilenberg, Samuel e Steenrod, Norman: *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press, 1952.

[6] Griffiths, Phillip e Harris, Joseph: *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, 1978.

[7] Moroianu, Andrei: *Lectures on Kähler Geometry*. Cambridge University Press, 2007.

[8] Rosenberg, Steven: *The Laplacian on a Riemannian manifold: an introduction to analysis on manifolds*. London Mathematical Society Press, 1997.
Disponibile all'indirizzo: `http://math.bu.edu/people/sr/articles/book.pdf` (url consultato in data 22 aprile 2014).

[9] Tortorella, Pietro: *Proprietà coomologiche delle varietà kähleriane*.
Disponibile all'indirizzo: `http://poisson.phc.unipi.it/~bianchi/ilcondominio/wiki/data/media/tesi27uni.pdf` (url consultato in data 22 aprile 2014).

[10] Voisin, Claire: *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*. Cambridge University Press, 2002.

[11] Xiao, Gang: *An example of hyperelliptic surfaces with positive index*. Northeast. Math. J.2, 1986.