UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Matilde Manzaroli

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 1

Übergeben Sie die Übungen Aufgabe 1,2, 3a),3b),3c),4a) bis 27. April, 12:00 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Die Übungsblätter können im Manzaroli-Briefkasten im Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgegeben oder eingescannt an matilde.manzaroli 'at' uni-tuebingen.de geschickt werden.

Eine Untergruppe N einer Gruppe G heißt *Normalteiler* von G, wenn für alle $g \in G$ und alle $n \in N$ gilt, dass $gng^{-1} \in N$.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler von G ist genau dann, wenn $gN = Ng$ für alle $g \in G$ gilt. Hierbei ist $gN = \{gn \mid n \in N\}$ und $Ng = \{ng \mid n \in N\}$.

(b) Zeigen Sie, dass Bilder von Normalteilern unter Gruppenhomomorphismen im allgemeinen keine Normalteiler sind, aber Urbilder von Normalteilern unter Gruppenhomomorphismen sind wieder Normalteiler.

(c) Sei $f : (G, \cdot) \to (H, \star)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(f)$ ein Normalteiler ist und dass die von f induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : {}^{G}/_{\mathrm{Ker}(f)} &\to \mathrm{Im}(f) \\ [g] &\mapsto f(g) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 2

Vergewissern Sie sich, dass die folgende Funktion ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} \exp : (\mathbb{R}, +) &\to (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot) \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(\exp)$.

(b) Zu welcher Untergruppe von $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist ${}^{\mathbb{R}}/_{\mathrm{Ker}(\exp)}$ isomorph und warum?

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Teilmenge $H := \{\mathrm{id}, (12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23)\}$ von $\mathbb{S}_4$.

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von $\mathbb{S}_4$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$ ist.

(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und Zykel $(x_1 x_2 \dots x_k) \in \mathbb{S}_n$ gilt: $\sigma \circ (x_1 \dots x_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \dots \sigma(x_k))\ \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$.)

Man kann die Gruppe $\mathbb{S}_4$ als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Tetraeders mit Ecken $1, 2, 3$ und 4 auffassen. Sei M_{AB} für $1 \leq A, B \leq 4$, $A \neq B$, der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wir definieren die Geraden $d_1 := M_{12}M_{34}$, $d_2 := M_{13}M_{24}$ und $d_3 := M_{14}M_{23}$ (siehe Abbildung).

(c) Erläutern sie geometrisch: $(12) \circ (34)$ ist eine Drehung um d_1, $(13) \circ (24)$ ist eine Drehung um d_2 und $(14) \circ (23)$ ist eine Drehung um d_3.

Sei σ eine beliebige Permutation aus $\mathbb{S}_4$, dann legt σ eine Bijektion $\varphi_\sigma : \{d_1, d_2, d_3\} \to \{d_1, d_2, d_3\}$ fest durch $\varphi_\sigma(M_{ij}M_{kl}) = M_{\sigma(i)\sigma(j)}M_{\sigma(k)\sigma(l)}$ für paarweise verschiedene $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{(12)}(d_1) &= \varphi_{(12)}(M_{12}M_{34}) = M_{21}M_{34} = d_1,\\
\varphi_{(12)}(d_2) &= \varphi_{(12)}(M_{13}M_{24}) = M_{23}M_{14} = d_3,\\
\varphi_{(12)}(d_3) &= \varphi_{(12)}(M_{14}M_{23}) = M_{24}M_{13} = d_2.
\end{aligned}$$

Zu jedem φ_σ bekommt man auf diese Weise eine eindeutig festgelegte Permutation $\Phi(\sigma) \in \mathbb{S}_3$ (z.B. $\Phi((12)) = (23) \in \mathbb{S}_3$, weil $\varphi_{(12)}$ d_2 mit d_3 vertauscht und d_1 auf sich selbst abbildet). Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$ durch $\sigma \mapsto \Phi(\sigma)$, wobei die $\Phi(\sigma)$ wie oben aus einem σ konstruiert wird.

(*Hinweis: Anschaulich tut die Abbildung* Φ *folgendes: Jedes* $\sigma \in \mathbb{S}_4$ *kann als Abbildung des Tetraeders auf sich selbst interpretiert werden (z.B. ist* (12) *ein Spiegelung an der Ebene senkrecht zu* $\overline{12}$ *durch* M_{12}*. Eine solche Abbildung bildet dann auch jede der Gerade* d_i*,* $i = 1, 2, 3$*, wieder auf ein anderes* d_j *ab. Dieser Vorgang liefert ebenfalls die Permutation* $\Phi(\sigma)$*.*)

(d) Zeigen Sie, dass für $\sigma = (34)$ und $\rho = (132)$ gilt: $\Phi(\sigma \circ \rho) = \Phi(\sigma) \circ \Phi(\rho)$, das heißt, die Homomorphieeigenschaft von Φ gilt somit für diese speziellen σ und ρ.

Die in d) gezeigte Eigenschaft gilt auch für alle Wahlen für σ und ρ. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass Φ ein Homomorphismus ist.

(e) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist.

(f) Zeigen Sie $\mathrm{Kern}(\Phi) = H$ und folgern Sie, dass es einen Isomorphismus von $\mathbb{S}_4/H$ nach $\mathbb{S}_3$ gibt.

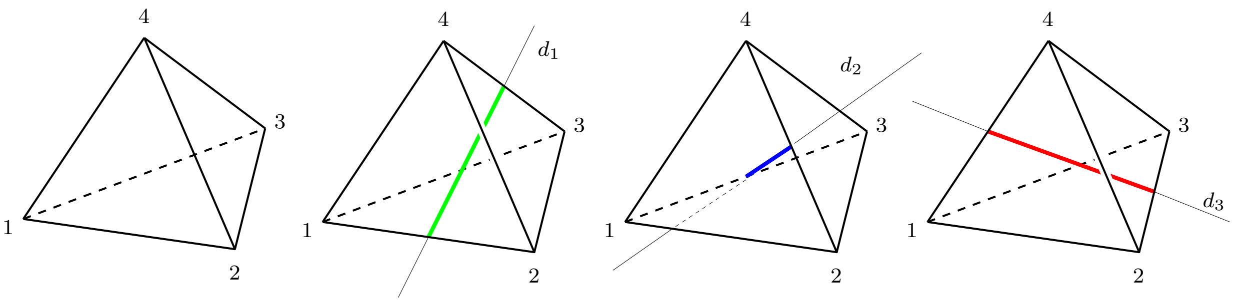

Abbildung 1: Ein gleichseitiger Tetraeder mit Ecken $1, 2, 3, 4$ und die Geraden d_1, d_2, d_3.

Aufgabe 4

(a) Sei G die freie Gruppe erzeugt von $\{x, y\}$. Beweisen Sie, dass die von x^2, xyx^{-1}, y erzeugte Untergruppe N von G ein Normalteiler vom Index 2 in G ist. Vom Index 2 bedeutet $|G/N| = 2$.

(b) Zeigen Sie, dass N die von 3 Elementen erzeugte freie Gruppe ist.

Die erste Übung findet am Mittwoch, 4. Mai 2022, um 16:15-17:45 Uhr online statt. Der Link wird per E-Mail verschickt. Ab dem 11. Mai findet die Übung in Raum C4H33 des C-Gebäudes um 16:15-17:45 Uhr statt.