UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 10

Übergeben Sie die Übungen 1 (a), 2 bis 6. Juli 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

(a) Vergewissern Sie sich, dass die Abbildung $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, die in jedem Eintrag von der Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ induziert wird ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist und zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(b) Schlussfolgern Sie, dass die von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ Index 12 hat.

(*Hinweis: Bei Teil (a) könnte folgende Division mit negativem Rest hilfreich sein: Für $x, y \in \mathbb{Z}$ und $y \neq 0$ können wir $x = yq + r$ für passendes r, q mit $|r| \leq \frac{1}{2}|y|$ schreiben.*)

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mit der Standardmetrik des $\mathbb{R}^2$ versehen. Zeigen Sie, dass die Gruppenoperation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, die durch

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \left(n, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2^n x \\ 2^{-n} y \end{pmatrix}$$

gegeben ist, nicht eigentlich ist.

(*Hinweis: Betrachten Sie das Geradenstück zwischen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*)

Aufgabe 3

Seien $a \in \mathbb{R}_{>1}, a' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto a^x$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^{a'}$ verallgemeinerte Wachstumsfunktionen. Zeigen Sie, dass $g \prec h$ und $h \not\prec g$ gilt.
