UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 11

Übergeben Sie die Übungen 2(1), 3(a) bis 13. Juli 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

Seien $a, a' \in \mathbb{R}_{>1}$ und $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto a^x$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto a'^x$ verallgemeinerte Wachstumsfunktionen. Zeigen Sie, dass f und g quasi-äquivalent sind.

Aufgabe 2

Sei $H := \langle x, y, z | z = xyx^{-1}y^{-1}, xz = zx, yz = zy \rangle$ die diskrete Heisenberggruppe.

1. Sei l eine positive ganze Zahl. Betrachten wir eine Kugel B mit dem Radius l und zentrieren die Identität im Cayley-Graphen der Heisenberg-Gruppe. Für $n = 0, 1, 2$ zeichne und zähle die Elemente in B so, dass die Exponenten von x sich zu n summieren.
2. Zeigen Sie, dass H polynomiell vom Grad 4 wächst.

(*Hinweis: Betrachten Sie den Cayleygraphen von H in $\mathbb{Z}^3$.*)

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie für alle $j \in \mathbb{N}$, dass $C_{j+1}(G) \subset C_j(G)$ ein Normalteiler ist und dass der Quotient ${}^{C_j(G)}/_{C_{j+1}(G)}$ abelsch ist.

(b) Schlussfolgern Sie für alle $j \in \mathbb{N}$, dass $G^{(j+1)} \subset G^{(j)}$ ein Normalteiler ist und dass der Quotient ${}^{G^{(j)}}/_{G^{(j+1)}}$ abelsch ist.
