UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 12

Übergeben Sie die Übungen 1, 3 a) bis 20. Juli 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die freie Gruppe $\mathbb{F}_n$ vom Rang $n \geq 2$ nicht fast auflösbar ist.

Aufgabe 2

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe von polynomiellem Wachstum und $\pi : G \to \mathbb{Z}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ker}(\pi)$ endlich erzeugt ist.

(*Hinweis: Wählen Sie ein $g \in G$, sodass $\pi(g) = 1$ gilt und zeigen Sie, dass für diese Wahl eine endliche Menge $S \subset \operatorname{Ker}(\pi)$ existiert, deren Vereinigung mit $\{g\}$ bereits G erzeugt. Um die Aussage zu beweisen reicht es nun ein $N \in \mathbb{N}$ zu finden, sodass die Menge $\{g^n s g^{-n} | s \in S, n \in \{-N, \ldots, N\}\}$ den Kern von π erzeugt.*)

Sei X ein zusammenhängender Graph. Ersetzt man alle Kanten von X durch Geradenstücke der Länge 1 und setzt die Graphenmetrik entsprechen fort, dann nennt man den hierbei entstandenen metrischen Raum die *geometrische Realisierung von X*. Für diese geometrische Realisierung schreibt man $(|X|, d_{|X|})$. Beispielsweise ist die geometrische Realisierung von $\operatorname{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ isometrisch zu $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik.

Aufgabe 3

Sei $X = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

(a) Zeigen Sie, dass die geometrische Realisierung von X geodätisch ist.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $\varphi : V \to |X|$, wobei V die kürzeste Weglängenmetrik hat (Definition 5.2.1 in [1]), eine isometrische Einbettung und eine Quasi-Isometrie ist.

eine isometrische Einbettung und eine quasi-Isometrie ist,where V is equipped with the minimal path length metric (Defnition 5.2.1 in [1]) is an isometric embedding and a quasi-isometry.

Literatur

[1] Geometric Group Theory: An Introduction, Clara Löh.