UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 2

Übergeben Sie die Übungen 1,2 bis 4. Mai 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Die Übungsblätter können im Manzaroli-Briefkasten im Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgegeben oder eingescannt an Matilde Manzaroli or Loujean Cobigo geschickt werden.

Aufgabe 1

Wir definieren $\mathbb{A}_4$ als Untergruppe der $\mathbb{S}_4$ wie folgt

$$\mathbb{A}_4 := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Sei H jene Untergruppe der $\mathbb{S}_4$, die auf Blatt 1 in Aufgabe 3 definiert wurde.

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von $\mathbb{A}_4$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede 2-elementige Untergruppe von H ein Normalteiler von H ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass die Eigenschaft ein Normalteiler zu sein nicht transitiv ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}_3$ mit Erzeugern und Relationen als

$$\mathbb{S}_3 \cong \{\tau, \sigma | \sigma^3 = \tau^2 = \sigma\tau\sigma\tau = \mathrm{id}\}$$

dargestellt werden kann.

(*Hinweis: Schreiben Sie die rechte Seite der obigen Gleichung als Faktorgruppe einer freien Gruppe mit dem Kern einer geeigneten Abbildung und benutzen Sie den Homomorphiesatz von Blatt 1, Aufgabe 1.*)

Aufgabe 3

(a) Sei N ein Normalteiler von G und U eine Untergruppe von G derart, dass $N \cap U = \{\mathrm{id}\}$ und $NU = G$ gilt. Zeigen Sie, dass $G \cong N \rtimes_\phi U$ gilt, wobei ϕ durch $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N), u \mapsto k_u$ gegeben ist, wobei k_u die Konjugation mit u bezeichnet.

(b) Sei U die Untergruppe der $\mathbb{S}_4$, die aus genau den Permutationen besteht, die 4 festhalten und sei H jene Untergruppe der $\mathbb{S}_4$, die auf Blatt 1 in Aufgabe 3 definiert wurde. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}_4 \cong H \rtimes_\varphi U$ für ein geeignetes φ gilt.

(c) Finden Sie eine weitere Untergruppe $U' \neq U$ von $\mathbb{S}_4$, sodass $\mathbb{S}_4 \cong H \rtimes_{\varphi'} U'$ für ein geeignetes φ' gilt und schlussfolgern Sie, dass die Zerlegung aus (a) bei gegebenem Normalteiler N nicht eindeutig ist.

(*Hinweis: Zeigen Sie für (a) zunächst, dass für $g \in G$ ein eindeutiges $n \in N$ und ein eindeutiges $u \in U$ existieren, sodass $g = nu$. Für (b) sollten Sie einen Blick auf Aufgabe 3, Blatt 1 werfen und überlegen zu welcher Gruppe U isomorph sein könnte. Bei (c) können Sie sich Arbeit sparen, indem Sie U' derart wählen, dass Sie Argumente aus (b) anbringen können.*)
