UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

# Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 3

---

**Übergeben Sie die Übungen 1,2 bis 11. Mai 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.**
**Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.**

Ist eine Gruppe (oder Untergruppe) G endlich, so nennt man $|G|$ die *Ordnung* von $G$. Die *Ordnung* eines Elements $g$ einer Gruppe $G$ ist definiert als das Minimum aller $m \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass $g^m = \mathrm{id} \in (G, \cdot)$.

## Aufgabe 1

(a) Sei $g$ ein Element einer endlichen Gruppe $G$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von $g$ die Ordnung von $G$ teilt.

(b) Wenn $G$ eine endliche Gruppe gerader Ordnung ist, dann existiert ein $g \in G$, sodass $\mathrm{Ordnung}(g) = 2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_4$ aus Aufgabe 1 von Blatt 2 keine Untergruppe der Ordnung 6 enthält und schlussfolgern Sie, dass die Umkehrung von Aufgabe 1 auf diesem Blatt nicht gilt.

(*Hinweis: Wählen Sie für (a) ein geeignetes $x \in \mathbb{N}$, sodass $\{\mathrm{id}, g, \dots, g^x\}$ eine Untergruppe von $G$ bildet.*)

---

## Aufgabe 2

Nehmen Sie an, dass ein freies amalgamiertes Produkt existiert und zeigen Sie dann, dass dieses Produkt bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig ist.

(*Hinweis: Orientieren Sie sich am Eindeutigkeitsbeweis der freien Gruppe.*)

---

Seien $A, G_1, G_2$ Gruppen und $\alpha_1, \alpha_2$ injektive Gruppenhomomorphismen, wobei $\alpha_i : A \to G_i$. Sei $S_i$ eine Menge von Rechtsnebenklassenrepräsentanten von ${}^{G_i}/_{A}$, wobei wir $A$ vermöge $\alpha_i$ mit seinem Bild im jeweiligen $G_i$ identifizieren, derart, dass $\mathrm{id}_{G_i} \in S_i$. Für ein $g \in G_1 \star_A G_2$ und eine endliche Folge $i = (i_1, \dots, i_n)$ in $\{1, 2\}$ mit $n \geq 0$ und $i_m \neq i_{m+1}$ mit $1 \leq m \leq n-1$ sagen wir, dass $g$ ein *reduziertes Wort* vom Typ $i$ ist, wenn $a \in A, s_1 \in S_{i_1} \backslash \{\mathrm{id}\}, \dots, s_n \in S_{i_n} \backslash \{\mathrm{id}\}$ existieren, sodass $g = a s_1 \cdots s_n$ gilt. Weiter ist die Menge aller reduzierten Wörter in $X$ definiert als die disjunkte Vereinigung aller $X_i$, wobei $X_i$ die Menge aller reduzierten Wörter in $G_1 \star_A G_2$ vom Typ $i$ bezeichnet. Man kann zeigen, dass $X$ eine Gruppe mit verschmelzenden und reduzierenden Wörtern ist und dass $X = G_1 \star_A G_2$.

## Aufgabe 3

(a) Reduzieren Sie das Wort $g = (1432)(123)(acbd)(1423)(ad)(bc) \in \mathbb{S}_4 \star_{\mathbb{S}_3} \mathbb{S}_4$, wobei wir die beiden Kopien von $\mathbb{S}_4$ dadurch unterscheiden, dass wir die linke $\mathbb{S}_4$ als Bijektionen auf $\{1, \dots, 4\}$ und die rechte $\mathbb{S}_4$ als Bijektionen auf $\{a, \dots, d\}$ verstehen. Die $\alpha_i$ sind durch die kanonische Einbettung (halte 4 bzw. $d$ fest) von $\mathbb{S}_3$ in $\mathbb{S}_4$ gegeben. Benutzen Sie als Rechtsnebenklassenrepräsentanten $\mathrm{id}, (14), (24)$ und $(34)$.

(b) Zeigen Sie, dass sich jedes Wort in $X$ eindeutig reduzieren lässt.

---

## Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_4 \star_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6 \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt.

(*Hinweis: Identifizieren Sie* $\mathbb{Z}_4$ *mit dem Erzeugnis von* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *und* $\mathbb{Z}_6$ *mit dem Erzeugnis von* $B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Außerdem könnte es hilfreich sein die Matrix* $C := B^2$ *zu betrachten.*)