UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 4

Übergeben Sie die Übungen 2,3 (nur für die Graphen A,B,D) bis 18. Mai 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Das *Geschlecht* eines endlichen zusammenhängenden Graphen G ist definiert als $g := 1-\#V+\#E$, wobei V die Menge der Ecken (engl.: vertices) und E die Menge der Kanten (engl.: edges) von G bezeichnet.

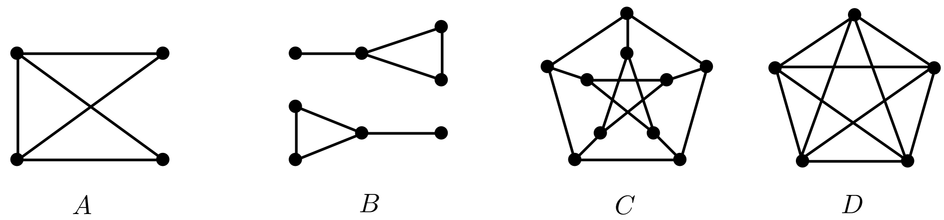
Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das Geschlecht eines endlichen zusammenhängenden Graphen immer nichtnegativ ist und genau dann Null ist, wenn dieser Graph ein Baum ist.

Aufgabe 2

(a) Skizzieren Sie die Cayley Graphen von $\mathbb{Z}_8$ bezüglich der Erzeugermengen $\{1\}$ und $\{2,3\}$.

(b) Sei S eine Erzeugermenge von $\mathbb{Z}_n$ und $k \in S$, sodass $\frac{n}{\mathrm{ggT}(k,n)} > 2$ gilt. Zeigen Sie, dass der Cayley Graph von $\mathbb{Z}_n$ bezüglich S genau $\mathrm{ggT}(k,n)$ viele disjunkte $\frac{n}{\mathrm{ggT}(k,n)}$-Zykel enthält.



Aufgabe 3

(a) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen der oben abgebildeten Graphen.

(b) Bestimmen Sie alle Untergraphen von A, die Cayley Graphen sind und geben Sie jeweils eine Gruppe an, die zu diesem Cayley Graphen gehört.

(c) Welche der obigen Graphen sind Cayley Graphen?

(*Hinweis: Um die Automorphismengruppe von C zu bestimmen, könnte es hilfreich sein die Ecken von C mit 2-elementigen Teilmengen von $\{1,\dots,5\}$ zu identifizieren. Für (c) dürfen Sie verwenden, dass alle Gruppen der Ordnung 10 entweder isomorph zu $\mathbb{Z}_{10}$ oder D_5 sind, wobei D_n die n-te Diedergruppe bezeichnet.*)

Aufgabe 4

- Zeigen Sie, dass $D_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.
- Zeigen Sie, dass D_n is $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
