UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 5

Übergeben Sie die Übungen 1, 2, 3a) bis 25. Mai 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es bei Operation einer Gruppe der Ordnung 55 auf einer Menge mit 39 Elementen einen Fixpunkt gibt.

Aufgabe 2

Sei G die freie Gruppe von zwei Erzeugern x, y und N die auf Blatt 1 in Aufgabe 4 definierte Untergruppe. Skizzieren Sie den Spannbaum der Operation durch Multiplikation von N auf dem Cayley Graphen von $(G, \{x, y\})$.

Sei G eine Gruppe, die auf einem *gerichteten* Graphen X operiert. Vergewissern Sie sich, dass Cayley Graphen als gerichtete Graphen aufgefasst werden können und dass Gruppen auch auf gerichteten Graphen operieren. Der *Quotientengraph* ${}^{G}/_{X}$ von X bezüglich G ist der Graph der aus X entsteht, wenn man Ecken und Kanten von X in der gleichen Bahn identifiziert. Beispielsweise sind Spannbäume von Gruppenoperationen auf Graphen Quotientengraphen. Ein Teilgraph $T \subset X$ heißt *Fundamentalbereich* von X bezüglich G, falls ein Graphensiomorphismus $T \to {}^{G}/_{X}$ existiert. Beachten Sie, dass $G.T = X$. Ein Graph, der isomorph zum unten abgebildeten Graphen mit Ecken P, Q und Kante y ist, heißt *Segment*.

$$P \xrightarrow{\quad y \quad} Q$$

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe, die auf einem gerichteten Graphen X derart operiert, dass ein Fundamentalbereich T von X bezüglich G existiert und T ein Segment ist. Seien G_P, G_Q, G_y die Stabilisatoren der Gruppenoperation von G auf X der Ecken $P, Q \in V(X)$, bzw. der Kante $y \in E(X)$, des Segments $T \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Der Graph X ist genau dann zusammenhängend, wenn G von $G_P \cup G_Q$ erzeugt wird.

(b) Der Graph X enthält genau dann keine Zykel, wenn der von den Inklusionen $G_P \to G$ und $G_Q \to G$ induzierte Gruppenhomomorphismus $G_P \star_{G_y} G_Q \to G$ injektiv ist.

(c) Der Graph X ist genau dann ein Baum, wenn die Abbildung $G_P \star_{G_y} G_Q \to G$ aus Teil (b) ein Gruppenisomorphismus ist.

(Hinweis: Für (b) dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass für $g_i \in G_{P_i} \backslash G_y$ mit $0 \leq i \leq n$, $\{P_i, P_{i+1}\} = \{P, Q\}$ und $g_0 \cdots g_n = \mathrm{id}_G$ schon folgt, dass $g_0 \cdots g_n \neq \mathrm{id}_{G_P \star_{G_y} G_Q}$.)

Aufgabe 4

Seien G_1, G_2 Gruppen und $G := G_1 \star G_2$ das freie Produkt dieser Gruppen. Zeigen Sie, dass ein Baum X existiert auf dem G mit Fundamentalbereich T derart operiert, dass T ein Segment ist, $G_P = G_1, G_Q = G_2$ und $G_y = \{id\}$ mit den Notationen aus der vorherigen Aufgabe gilt.
