UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 6

Übergeben Sie die Übungen 1(a), 4, 5 bis 1. Juni 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass für eine freie Gruppe $\mathbb{F}_n$ vom Rang $n \geq 2$ und ein $m \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe $U \subset \mathbb{F}_n$ existiert, die selbst eine freie Gruppe vom Rang $r \geq m$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_2$ für alle $m \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe $U \subset \mathbb{F}_2$ existiert, die selbst eine freie Gruppe vom Rang m ist.

(*Hinweis: Aufgabe 1 (b): Sehen Sie sich Blatt 1 Übung 4 an.*)

Aufgabe 2

Zeigen Sie das folgende Ping-Pong Lemma von freien Produkten: Sei G eine Gruppe und seien $G_1, G_2 \subset G$ Untergruppen derart, dass G von $G_1 \cup G_2$ erzeugt wird und $|G_1| \geq 3, |G_2| \geq 2$ gilt. Sei X eine Menge auf der G operiert. Seien X_1, X_2 nichtleere Teilmengen von X mit $X_2 \not\subset X_1$ und

(1) $\forall g \in G_1 \backslash \{id\} : gX_2 \subset X_1$,

(2) $\forall g \in G_2 \backslash \{id\} : gX_1 \subset X_2$.

Dann gilt $G \cong G_1 \star G_2$.

(*Hinweis: Sehen Sie sich Blatt 3 an, erinnern Sie sich an reduzierte Wörter in freien Produkten.*)

Aufgabe 3

Seien die Metriken d_1, d_2 durch

$$d_i\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) := \sqrt[i]{|x-x'|^i + |y-y'|^i}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_1)$ Bilipschitz äquivalent zu $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ist.

Aufgabe 4

Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Z}$ und $\{n^3 | n \in \mathbb{Z}\}$ quasi-isometrisch bezüglich der euklidischen Metrik auf $\mathbb{Z}$ sind und beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 5

Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ quasi-Isometrien. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ eine quasi-Isometrie ist.