UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 7

Übergeben Sie die Übungen 1a), 1b), 3 bis 15. Juni 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir $\mathbb{Z}$ als endlich erzeugte Gruppe auffassen.

(a) Zeigen Sie, dass eine quasi-isometrische Einbettung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bereits eine quasi-Isometrie ist.

(b) Sei $X := (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^2$ ein metrischer Raum vermöge der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass keine quasi-isometrische Einbettung $f : X \to \mathbb{Z}$ existiert.

(c) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}^2$ quasi-isometrisch sind und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_2$ in ihren zwei Erzeugern nicht quasi-isometrisch sind.

Aufgabe 2

Seien X, Y endlich erzeugte Gruppen und $f : X \to Y$ eine bijektive quasi-Isometrie. Zeigen Sie, dass f eine Bilipschitzäquivalenz ist.

Aufgabe 3

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und N ein Normalteiler in G. Zeigen Sie, dass N genau dann endlich ist, wenn die Projektion $\pi : G \to {}^{G}/_{N}$ eine quasi-Isometrie ist.

(*Hinweis: Zeigen Sie für die Rückrichtung, dass N in einer geeigneten Kugel mit endlichem Radius enthalten ist.*)
