UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 8

Übergeben Sie die Übungen 1(a), 1(b), 3 bis 22. Juni 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ mit der euklidischen Metrik nicht geodätisch ist.

(b) Begründen Sie anschaulich, dass $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ für beliebiges $\epsilon > 0$ $(1, \epsilon)$-quasi-geodätisch ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr ist und beweisen Sie Ihre Behauptung:
Ist X geodätisch und $f : X \to Y$ eine quasi-Isometrie, dann ist auch Y geodätisch.

Aufgabe 2

Sei $X := \{(a^3, b)|a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit der Standardmetrik des $\mathbb{Z}^2$ ein metrischer Raum. Dann operiert $\mathbb{Z}$ auf X vermöge $\big(z, (a^3, b)\big) \mapsto (a^3, b + z)$. Prüfen Sie, ob Sie das Švarc-Milnor Lemma anwenden können.

Aufgabe 3

Sei (X, d) ein metrischer Raum auf dem eine Gruppe G durch Isometrien derart operiert, dass für alle $x \in X$ und $r \geq 0$ die Menge $\{g \in G|d(x, g{\cdot}x) \leq r\}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass dann für jede abgeschlossene Kugel $B \subset X$ die Menge $\{g \in G|g \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Aufgabe 4

Sei (X, d) ein eigentlicher metrischer Raum auf dem G durch Isometrien derart operiert, dass jede Bahn dieser Operation quasi-dicht in X liegt. Zeigen Sie, dass diese Operation kokompakt ist.

(*Hinweis: Überlegen Sie sich, dass Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen kompakt sind.*)
