UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Loujean Cobigo
Matilde Manzaroli
Hannah Markwig

Übungen zur Vorlesung geometrische Gruppentheorie

Sommersemester 2022

Blatt 9

Übergeben Sie die Übungen 1, 3 bis 29. Juni 2022, 11:59 Uhr. Die restlichen Übungen werden im Unterricht durchgeführt.
Gruppe 2 (bzw. Gruppe 1) kann die Übungsblätter im Manzaroli-Briefkasten in Raum A16 Gebäude C im 3. Stock abgeben oder eingescannt und per E-Mail an Manzaroli Matilde (bzw. Loujean Cobigo) schicken.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass Kommensurabilität eine Äquivalenzrelation definiert.

Seien G eine topologische Gruppen und $G_i \subset G$ (mit $i \in I$ beliebige Indexmenge) disjunkte Teilmengen von G, die jeweils nichtleer, offen und abgeschlossen sind, derart, dass $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ gilt und die G_i sind jeweils maximal, d.h. für G_i gilt, dass $\emptyset, G_i$ die einzigen Mengen bezüglich der Teilraumtopologie von G_i sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Die G_i werden *Zusammenhangskomponenten* von G genannt. Diese Zerlegung einer topologischen Gruppe in Zusammenhangskomponenten existiert immer und ist eindeutig.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente G_0 mit $\mathrm{id} \in G_0$ eine Untergruppe von G bildet.

Aufgabe 3

Seien G, H Gruppen mit $G = H = \mathbb{Z}$, die auf $\mathbb{R}^2$ wie folgt operieren

$$G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (n, (x, y)) \mapsto (n + x, y) \text{ und } \mathbb{R}^2 \times H \to \mathbb{R}^2, ((x, y), m) \mapsto (x, y + m).$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit obigen Gruppenoperationen eine mengentheoretische Paarung von G und H ist.

Aufgabe 4

Sei G eine topologische Gruppe und $\Gamma \subset G$ eine abgeschlossene diskrete Untergruppe. Zeigen Sie, dass die Linksmultiplikation $\Gamma \times G \to G$ eine eigentliche Gruppenoperation ist.
